# 221. Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

## 1 Généralités

### 1.1 Définition

**Définition 1.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre* $p$ toute équation sur $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \ldots + A_0(t)Y + B(t) \tag{$E$}$$

où $(A_k)_{0\leqslant k<p}$ sont des fonctions continues de $I$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B$ est une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{K}^n$.

**Remarque 2.** Lorsque $B = 0$, $(E)$ est dite *homogène.*

**Remarque 3.** On peut ramener toute équation différentielle linéaire d'ordre $p$ à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

### 1.2 Structure de l'ensemble des solutions

**Théorème 4** (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soit une équation différentielle linéaire :

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{$L$}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues. On note l'ensemble de ses solutions $\mathcal{S}_L$. Alors pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution $V$ de $(L)$ définie sur $I$ tout entier, telle que $V(t_0) = X_0$.

**Corollaire 5.** On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$Y' = A(t)Y. \tag{$H$}$$

Alors pour tout $t_0 \in I$, $\pi_{t_0} : \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^n \\ V & \mapsto & V(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.



**Théorème 6.** $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

**Développement 1.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $n$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par les translations $(\tau_a : f \mapsto (x \mapsto f(x + a)))_{a\in\mathbb{R}}$. Alors $F$ est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$.

**Remarque 7.** Soit $V_0$ une solution de $(E)$. Quand $V$ décrit $\mathcal{S}_H$, $V_0 + V$ décrit $\mathcal{S}_L$.

**Corollaire 8.** $\mathcal{S}_L$ est un espace affine de dimension $n$.

**Remarque 9.** $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension $np$.

**Définition 10.** Soient $Y_1, \ldots, Y_n \in K^n$ des solutions de $(L)$. On appelle *wronskien* l'application $w_{Y_1,\ldots,Y_n} : t \mapsto \det(Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$.

**Proposition 11.** Le rang de $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$ ne dépend pas de $t$.

**Corollaire 12.** $Y_1, \ldots, Y_n$ est une base de $\mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\exists t_0 \in I, W_{Y_1,\ldots,Y_n}(t_0) \neq 0.$$

Dans ce cas $W_{Y_1,\ldots,Y_n}$ ne s'annulera **jamais**.

**Proposition 13** (Formule de Liouville)**.** Soit $t_0 \in I$.

$$\forall Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{S}_H, \forall t \in I, W_{Y_1,\ldots,Y_m}(t) = W_{Y_1,\ldots,Y_m}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}A(u)du.\right)$$

## 2 Résolution effective pour des coefficients constants

On désigne par $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Définition 14.** On note :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

**Exemple 15.** Si $N$ est une matrice nilpotente, $e^N = \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!}$.

**Exemple 16.** Si $A$ est diagonalisable $(A = P\Delta P^{-1})$, alors $e^A = Pe^{\Delta}P^{-1}$.

**Exemple 17.** Si $A$ est le bloc de Jordan de taille $p$,

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \exp(tJ_\lambda) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & t \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 18.** Si $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, $e^{A+B} = e^A e^B$.

**Remarque 19.** $\det e^A = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

**Théorème 20.** L'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$Y' = AY \tag{$H_C$}$$

a pour solution telle que $Y(t_0) = V_0$ la fonction :

$$Y : t \mapsto e^{(t-t_0)A} V_0$$

**Exemple 21.** Si $A$ est diagonalisable, si on note $(V_1, \dots, V_m)$ une base de vecteurs propres de $A$ de valeurs propres respectives $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, on obtient une base $(Y_1, \dots Y_m)$ de $S_{H_C}$ donnée par :

$$Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

**Proposition 22.** Si $A$ n'est pas diagonalisable, notons tout de même $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_s$. On peut considérer sa réduction de Jordan sur $\mathbb{C}$, ce qui permet de déterminer que les solutions de $(H_C)$ ont la forme suivante (appelée *quasi-polynôme*) :

$$t \mapsto \sum_{j=1}^{s} P_j(t) e^{\lambda_j t}$$

où $P_j$ est un polynôme pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$ de degré au plus $m_j - 1$.

**Proposition 23** (Variation de la constante)**.** On cherche une solution particulière sous la forme $Y(t) = e^{tA} V(t)$. L'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$Y' = AY + B(t) \tag{$L_V$}$$

a pour solution telle que $Y(t_0) = V_0$ la fonction :

$$Y : t \mapsto e^{(t-t_0)A} V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u) du.$$

**Exemple 24.** Mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique.

$$\frac{d\vec{V}}{d} t = q\vec{V} \wedge \vec{B} + q\vec{E}$$

**Références.** $(1 - \varepsilon)$ Demailly $+ \varepsilon$ Arnold $+$ Rouvière $+$ Gourdon.

Jill-Jênn Vie – `agreg-cachan.fr`



# 3 Linéarisation et stabilité

## 3.1 Linéarisation

**Théorème 25** (Hartman-Grobman, dit de linéarisation)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ possédant un zéro $p$. Soit $A$ la matrice jacobienne de $A$ au point $p$. On suppose que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. Alors il existe $U$ voisinage de $p$, $V$ voisinage de 0 et un homéomorphisme $h : U \to V$ tel que $h(p) = 0$ qui envoie bijectivement les solutions de l'équation différentielle

$$Y' = f(Y) \tag{$E_p$}$$

sur les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$Y' = AY. \tag{$L_p$}$$

## 3.2 Stabilité et petites perturbations

**Définition 26.** On considère l'équation suivante en dimension 1

$$y' = f(y) \tag{$E_1$}$$

et on note $y_z$ sa solution maximale pour $y_z(t_0) = z$. On dit que $y_{z_0}$ est *stable* s'il existe une boule fermée $B = B_f(z_0, r)$ et une constante $C \geqslant 0$ telles que

1. $\forall z \in B$, $t \mapsto y_z(t)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ ;
2. $\forall z \in B, \forall t \geqslant t_0, ||y_z(t) - y_{z_0}(t)|| \leqslant C||z - z_0||$.

Si de plus il existe $\gamma : [t_0, +\infty[ \to \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ telle que : $\forall z \in B, \forall t \geqslant t_0, ||y_z(t) - y_{z_0}(t)|| \leqslant \gamma(t)||z - z_0||$, $y_{z_0}$ est dite *asymptotiquement stable*.

**Proposition 27.** Les solutions de l'équation $Y' = AY$ sont

1. asymptotiquement stables si seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ;
2. stables si et seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

**Définition 28.** Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $r : [t_0, +\infty[ \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ une fonction continue. On appelle *petite perturbation d'un système linéaire* l'étude du système :

$$Y' = AY + r(t, Y). \tag{$P$}$$

**Remarque 29.** Si la partie linéaire est asymptotiquement stable et si la « perturbation » $r$ est suffisamment petite, en un sens à préciser, alors les solutions de $(P)$ sont encore asymptotiquement stables.

**Développement 2** (Liapounov)**.** On considère les équations $(E_p)$ et $(L_p)$ pour $n = 1$ et $p = 0$ (on a donc $A = \mathrm{D}f(0)$). On suppose que : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Alors le point 0 est *attractif* pour $(E_0)$ et $(L_0)$, c'est-à-dire que pour tout $x$ assez voisin de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini.