Colles de mathématiques

Une grande partie de ces exercices provient du site
`http://mp.cpgedupuydelome.fr`
Ils sont super chouettes. Diffusez-les.

Exotiques

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots .$$

Exercice 2. Soit E un ensemble, $A, B \subset E$. On définit :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E)^2 \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective, surjective, bijective.

Exercice 3. L'ensemble des suites réelles périodiques est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\sin x) = f(x).$$
Montrer que f est constante.

Exercice 5 (Laguerre)**.** Soit $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{e^x}{n!}(e^{-x}x^n)^{(n)}$. Montrer que P_n est un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que :
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Exercice 7. Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative $\star$. Montrer que E admet un élément idempotent, c'est-à-dire qu'il existe $u \in E$ tel que $u \star u = u$.

Exercice 8. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\lim_{\ell \to \infty} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x - \lambda} = i\pi \cdot \operatorname{sgn}(Im(\lambda)).$$

Exercice 9. Calculer :
$$\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1 - t^2}}.$$

Exercice 10. Soit $0 < a < b$. Étudier le comportement des suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier n :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Exercice 11. Existe-t-il un multiple de 2014 qui ne s'écrit qu'avec des 6 ?

Exercice 12. Soit n un entier, p un nombre premier. Montrer que :
$$v_p(n!) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$
En déduire le nombre de zéros à la fin de 2014!.

Exercice 13. Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Calculer $\frac{P'}{P}$ et en déduire que $PP'' - P'^2$ n'admet aucune racine réelle.

Exercice 14. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P^2 ne peut s'écrire sous la forme $Q^2 + R^2$ avec $\deg Q \neq \deg R$.

Exercice 15. Existe-t-il une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée sur aucun intervalle non singleton ?

Exercice 16. Résoudre l'équation suivante :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1) \qquad P \in \mathbb{C}[X].$$

Exercice 17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation suivante :

$$X = A \cdot \operatorname{Tr}(X) + B \qquad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, p et q deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que pq est un projecteur et en déterminer le noyau et l'image.

Classiques

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}.$$

Exercice 21 (Vandermonde)**.** Soit $m, n, r \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Exercice 22. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Exercice 23 (Wilson)**.** Montrer que p est premier si et seulement si

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Exercice 24. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot « anagramme » ?

Exercice 25. Soient E, F et G des ensembles finis. Montrer que $E^{F \times G}$ et $\left(E^F\right)^G$ sont équipotents.

Exercice 26. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $F = \{f \in E, f(0) + f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E puis en déterminer un supplémentaire.

Exercice 27. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P \circ f = 0$. Montrer que f est constante.

Exercice 28 (Lagrange)**.** Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), \ldots, P(n)) \end{array}$$

est un isomorphisme et construire sa réciproque.

Exercice 29. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 30. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Jill-Jênn Vie – 6 août 2014