Ralph Azham, GroLopin, Dobble

Jill-Jênn Vie

Parimaths

19 octobre 2013

Problème

- Un ensemble S d'objets : quadruplets de $\{0, 1, 2, 3\}^4$.
- Deux objets sont dits compatibles s'ils ont moins de deux composantes en commun.
- Quel est le plus grand nombre d'objets compatibles deux à deux qu'on peut obtenir ?

Exemple

- Pour que $S = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, a, b)\}$ soit composé d'objets deux à deux compatibles, il faut : $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Ralph Azham

Problème

- Un ensemble S d'objets : quadruplets de $\{0, 1, 2, 3\}^4$.
- Deux objets sont dits compatibles s'ils ont moins de deux composantes en commun.
- Quel est le plus grand nombre d'objets compatibles deux à deux qu'on peut obtenir ?

Exemple

- Pour que $S = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, a, b)\}$ soit composé d'objets deux à deux compatibles, il faut : $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Ralph Azham

Problème

- Un ensemble S d'objets : quadruplets de $\{0, 1, 2, 3\}^4$.
- Deux objets sont dits compatibles s'ils ont moins de deux composantes en commun.
- Quel est le plus grand nombre d'objets compatibles deux à deux qu'on peut obtenir ?

Exemple

- Pour que $S = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, a, b)\}$ soit composé d'objets deux à deux compatibles, il faut : $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Ralph Azham

Problème

- Un ensemble S d'objets : quadruplets de $\{0, 1, 2, 3\}^4$.
- Deux objets sont dits compatibles s'ils ont moins de deux composantes en commun.
- Quel est le plus grand nombre d'objets compatibles deux à deux qu'on peut obtenir ?

Exemple

- Pour que $S = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, a, b)\}$ soit composé d'objets deux à deux compatibles, il faut : $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Problème

- Un ensemble S d'objets : quadruplets de $\{0, 1, 2, 3\}^4$.
- Deux objets sont dits compatibles s'ils ont moins de deux composantes en commun.
- Quel est le plus grand nombre d'objets compatibles deux à deux qu'on peut obtenir ?

Exemple

- Pour que $S = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, a, b)\}$ soit composé d'objets deux à deux compatibles, il faut : $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Exemple

0	0	0	0
0	1	1	1
0	2	2	2
0	3	3	3
1	0	1	2
1	1	2	3
1	2	3	0
1	3	0	1
2	0	2	1
2	1	3	2
2	2	0	3
2	3	1	0
3	0	3	X
3	1	0	X
3	2	1	X
3	3	2	X

Proposition

Il est impossible d'avoir 17 objets deux à deux compatibles.

Preuve

- D'après le principe des tiroirs, parmi 17 objets, 5 ont la même première composante.
- Parmi ces 5, 2 ont la même deuxième composante, et sont donc incompatibles.

Ralph Azham

Proposition

Il est impossible d'avoir 17 objets deux à deux compatibles.

Preuve

- D'après le principe des tiroirs, parmi 17 objets, 5 ont la même première composante.
- Parmi ces 5, 2 ont la même deuxième composante, et sont donc incompatibles.

Intuition

Si l'on considère une paire de droites distinctes, soit elles se coupent en un point (« une composante en commun »), soit elles sont parallèles (« aucune composante en commun »).

$\mathbb{F}_4$, le corps à 4 éléments

Posons $a = X, b = X + 1$ et effectuons tous les calculs modulo 2 et modulo $X^2 + X + 1$.

- $b + 1 = (X + 1) + 1 \equiv X = a$
- $ab = X(X + 1) = X^2 + X \equiv (X^2 + X + 1) + 1 \equiv 1$

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

FIGURE : Tables d'addition et de multiplication sur le corps à 4 éléments.

Posons $a = X, b = X + 1$ et effectuons tous les calculs modulo 2 et modulo $X^2 + X + 1$.

- $b + 1 = (X + 1) + 1 \equiv X = a$
- $ab = X(X + 1) = X^2 + X \equiv (X^2 + X + 1) + 1 \equiv 1$

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

FIGURE : Tables d'addition et de multiplication sur le corps à 4 éléments.

$\mathbb{F}_4$, le corps à 4 éléments

Posons $a = X, b = X + 1$ et effectuons tous les calculs modulo 2 et modulo $X^2 + X + 1$.

- $b + 1 = (X + 1) + 1 \equiv X = a$
- $ab = X(X + 1) = X^2 + X \equiv (X^2 + X + 1) + 1 \equiv 1$

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

FIGURE : Tables d'addition et de multiplication sur le corps à 4 éléments.

$\mathbb{F}_4$, le corps à 4 éléments

Posons $a = X, b = X + 1$ et effectuons tous les calculs modulo 2 et modulo $X^2 + X + 1$.

- $b + 1 = (X + 1) + 1 \equiv X = a$
- $ab = X(X + 1) = X^2 + X \equiv (X^2 + X + 1) + 1 \equiv 1$

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

FIGURE : Tables d'addition et de multiplication sur le corps à 4 éléments.

Équations

Soient deux droites distinctes à coefficients dans $\{0, 1, a, b\}$:

$$y = mx + p \quad y = m'x + p'$$

- Soit $m = m'$, les droites sont parallèles et n'ont aucun point en commun ;
- Soit $m \neq m'$ et elles se coupent en le point (x, y) tel que :

$$\begin{aligned} mx + p &= m'x + p' \\ (m - m')x &= p' - p \\ x &= (p' - p)/(m - m') \end{aligned}$$

Droite	0	1	a	b
$y = 0x + 0$	0	0	0	0
$y = 0x + 1$	1	1	1	1
$y = 0x + a$	a	a	a	a
$y = 0x + b$	b	b	b	b
$y = 1x + 0$	0	1	a	b
$y = 1x + 1$	1	0	b	a
$y = 1x + a$	a	b	0	1
$y = 1x + b$	b	a	1	0
$y = ax + 0$	0	a	b	1
$y = ax + 1$	1	b	a	0
$y = ax + a$	a	0	1	b
$y = ax + b$	b	1	0	a
$y = bx + 0$	0	b	1	a
$y = bx + 1$	1	a	0	b
$y = bx + a$	a	1	b	0
$y = bx + b$	b	0	a	1

FIGURE : Une grille de 16 objets compatibles.

Quelques liens

Merci de votre attention !

- prologin.org, le concours national d'informatique (inscriptions jusqu'au 4 janvier 2014)
- grolopin.com
- les slides s(er)ont disponibles sur jill-jenn.net/conferences