# La Grille de Ralph Azham

Jill-Jênn Vie Lewis Trondheim

20 septembre 2013

**Résumé**

Le 24 juillet 2010, Lewis m'a demandé de constituer une grille de 16 objets ayant chacun 4 attributs (élément, force, signe astrologique, point cardinal) pouvant chacun prendre 4 valeurs possibles (par exemple, *eau*, *feu*, *air*, *terre* pour l'élément). La contrainte : 2 objets quelconques ne doivent jamais avoir plus d'un attribut en commun.

On considère un espace d'objets représentés par des quadruplets dont chacune des composantes (dite *attribut*) est à choisir parmi 4 valeurs possibles. Deux objets sont dites *incompatibles* s'ils coïncident sur deux attributs (*compatibles* sinon) et on s'intéresse à déterminer un ensemble de 16 objets compatibles deux à deux.

Par exemple, si l'ensemble contient les objets suivants :
— Arc = (air, sagesse, Tanghor, est)
— Lance = (eau, sexualité, Angthar, ouest)
Si Bracelet est de la forme (eau, sagesse, …), il ne pourra être ni de Tanghor ni de l'est (incompatible avec Arc), ni d'Angthar, ni de l'ouest (incompatible avec Lance).

Tout d'abord, il est simple de prouver qu'il est impossible d'obtenir un ensemble de 17 objets compatibles : parmi 17 objets, forcément 5 d'entre eux ont le même premier attribut (sinon, cela signifie qu'on a au plus 4 objets pour chacune des 4 valeurs possibles pour le premier attribut, donc qu'on en a 16 en tout au maximum). Sur ces 5 objets, forcément 2 d'entre eux ont le même deuxième attribut (pour la même raison), on a donc 2 objets qui coïncident sur les deux premiers attributs, et qui sont donc incompatibles.

Tester toutes les possibilités par ordinateur est impraticable car il y a $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ objets possibles donc $\binom{256}{16} = 10078751602022313874633200$ ensembles. À la main, j'ai construit 12 objets. Impossible d'en trouver un de plus, donc j'ai répondu à Lewis que ce n'était vraisemblablement pas possible, et que j'en chercherais une preuve... N'ayant pas réussi à le prouver, je me suis dit que c'était peut-être possible. J'ai recommencé avec une approche de type *sudoku*, en essayant de faire intervenir au minimum mon libre arbitre, et j'ai ainsi réussi à obtenir une grille de 16 objets compatibles.

Lewis m'a alors demandé s'il était possible de répartir ces objets en 4 catégories de 4 objets au sein desquelles deux objets n'auraient aucun attribut en commun. Je me suis dit : « Ça a l'air tellement joli que ça semble possible » et, effectivement, ça l'était. De telles propriétés mathématiques présagent une structure plus fine qu'un simple quadruplet de valeurs.

Ce n'est que deux ans plus tard que j'ai compris. L'intuition : si l'on considère une paire de droites distinctes, soit elles se coupent en un point (« un attribut en commun »), soit elles sont parallèles (« aucun attribut en commun »). Considérons les opérations suivantes.

| $+$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | $b$ | $a$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $0$ | $1$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $1$ | $0$ |

| $\times$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $0$ | $a$ | $b$ | $1$ |
| $b$ | $0$ | $b$ | $1$ | $a$ |

FIGURE 1 – Tables d'addition et de multiplication sur le corps à 4 éléments.

En se servant de ces tables, on obtient par exemple que $(a \times b) + b = 1 + b = a$. J'attire votre attention sur le fait que quels que soient les symboles $x, y, z$ choisis, on a la relation $x(y + z) = xy + xz$ (distributivité de $\times$ par rapport à $+$) et tout élément non nul a un inverse pour la multiplication ($1 \times 1 = 1$, $ab = 1$).

Chaque droite $y = mx + p$ (où $m$ et $p$ sont dans l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$) va correspondre à l'arme d'attributs $(m0 + p, m1 + p, ma + p, mb + p)$ (remplacer $x$ par $a$ donne le signe astrologique, remplacer $x$ par $b$ donne le point cardinal, et ainsi de suite[1]). Par exemple, $y = mx + p = ax + b$ aura pour point cardinal $mb + p = ab + b = a$ (comme indiqué ci-dessus) et on peut donc déterminer que l'arme $y = ax + b$ a pour attributs $(b, 1, 0, a)$ (cf. Figure 2).

À présent, si on considère deux droites à coefficients dans $\{0, 1, a, b\}$ : $y = mx+p$ et $y = m'x + p'$, soit on a $m = m'$, auquel cas ces droites sont parallèles et donc n'ont aucun point en commun, soit $m \neq m'$ et elles se coupent en le point $(x, y)$ défini uniquement par $mx + p = m'x + p'$ c'est-à-dire $(m - m')x = (p' - p)$ et $x = (m - m')^{-1}(p' - p)$ car $m - m'$ a bien un inverse pour la multiplication. Elles coïncident alors en l'attribut $x$.

1. Libre à vous de choisir la correspondance entre $\{0, 1, a, b\}$ et {nord, est, sud, ouest}.

| | Objet | Droite | 0 | 1 | $a$ | $b$ | Élément | Force | Signe | Point |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Armes | Arc | $y = 0x + 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | Air | Sagesse | Tanghor | E |
| | Masse | $y = 0x + 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | Terre | Argent | Moogthar | N |
| | Épée | $y = 0x + a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | Feu | Pouvoir | Sashir | S |
| | Lance | $y = 0x + b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | Eau | Sexualité | Angthar | O |
| Magie | Cristal | $y = 1x + 0$ | 0 | 1 | $a$ | $b$ | Air | Argent | Sashir | O |
| | Baguette | $y = 1x + 1$ | 1 | 0 | $b$ | $a$ | Terre | Sagesse | Angthar | S |
| | Pierre | $y = 1x + a$ | $a$ | $b$ | 0 | 1 | Feu | Sexualité | Tanghor | N |
| | Perle | $y = 1x + b$ | $b$ | $a$ | 1 | 0 | Eau | Pouvoir | Moogthar | E |
| Reliques | Mâchoires | $y = ax + 0$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 | Air | Pouvoir | Angthar | N |
| | Yeux | $y = ax + 1$ | 1 | $b$ | $a$ | 0 | Terre | Sexualité | Sashir | E |
| | Oreilles | $y = ax + a$ | $a$ | 0 | 1 | $b$ | Feu | Sagesse | Moogthar | O |
| | Mains | $y = ax + b$ | $b$ | 1 | 0 | $a$ | Eau | Argent | Tanghor | S |
| Bijoux | Collier | $y = bx + 0$ | 0 | $b$ | 1 | $a$ | Air | Sexualité | Moogthar | S |
| | Couronne | $y = bx + 1$ | 1 | $a$ | 0 | $b$ | Terre | Pouvoir | Tanghor | O |
| | Bague | $y = bx + a$ | $a$ | 1 | $b$ | 0 | Feu | Argent | Angthar | E |
| | Bracelet | $y = bx + b$ | $b$ | 0 | $a$ | 1 | Eau | Sagesse | Sashir | N |

FIGURE 2 – Une grille de 16 objets compatibles.

Par exemple, les droites $y = ax+1$ et $y = ax+b$ sont parallèles (le cas $m = m'$) : en effet $y = ax + 1$ est associé à $(1, b, a, 0)$ et $y = ax + b$ à $(b, 1, 0, a)$ : les Yeux et Mains n'ont aucun attribut en commun.

Les droites $y = x + 1$ et $y = ax + a$ se coupent en le point d'abscisse $x = (1 - a)^{-1}(a - 1) = b^{-1}b = 1$, soit la deuxième composante : en effet $y = x + 1$ est associé à $(1, \boxed{0}, b, a)$ et $y = ax + a$ à $(a, \boxed{0}, 1, b)$ : la Baguette et les Oreilles ont la même force : Argent.

# Pour aller plus loin

**Théorie des graphes.** On peut représenter l'espace des objets par un graphe dont les nœuds sont les objets et deux objets sont reliés par une arête si et seulement s'ils sont compatibles. Résoudre le problème de Lewis correspond à chercher une clique de taille 16 dans le graphe. Mais ce problème est NP-complet.

**Plans affines finis.** Plaçons-nous dans le corps $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$, représenté par $(0, 1, a, b) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{X}, \overline{X + 1})$. Chaque droite $y = f(x)$ sera associée aux attributs $(f(0), f(1), f(a), f(b))$, qui correspondent aux points d'incidence $(x, f(x)) \in \mathbb{F}_4^2$. Pour retrouver les opérations Figure 1, il suffit de réduire les opérations modulo $X^2 + X + 1$ : par exemple, $b \times b = (\overline{X + 1})(\overline{X + 1}) = \overline{(X + 1)^2} = \overline{X^2 + 2X + 1} = \overline{(X^2 + X + 1) + X} = \overline{X} = a$. On peut construire un tel plan affine $\mathbb{F}_n^2$ pour tout $n$ de la forme $p^k$ où $p$ est un nombre premier, et donc résoudre le problème de Lewis pour $n^2 = p^{2k}$ objets à $n = p^k$ attributs pouvant chacun prendre $n = p^k$ valeurs. Le problème de Lewis pour $n = 12$ reste à ce jour ouvert.