

# Autour du pavage de Penrose

Jill-Jênn Vie

Encadrant : Thomas Fernique

4 septembre 2009

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Divers types de tuiles et leurs contraintes locales</b>	<b>3</b>
2.1	Avec couleurs ou nombres . . . . .	3
2.2	Avec dégradés de couleurs ou flèches . . . . .	3
2.3	Avec creux et bosses . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Généralités sur les pavages</b>	<b>4</b>
3.1	Pavages par substitution . . . . .	4
3.2	Règles locales . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Coupe et projection</b>	<b>5</b>
4.1	Généralités . . . . .	5
4.2	Pavage de Penrose : $5 \rightarrow 2$ . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Condition d'alternance</b>	<b>8</b>
5.1	Dans le pavage de Penrose . . . . .	8
5.2	Changement des vecteurs de coupe, impact sur la condition d'alternance .	9
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>II</b>
<b>A</b>	<b>Démonstration du lien entre l'escalier associé à <math>\frac{1}{\varphi}</math> et la séquence de Fibonacci</b>	<b>II2</b>

## Table des figures

1	Assemblage de tuiles avec couleurs, avec nombres . . . . .	3
2	Assemblage de tuiles avec dégradés, avec flèches . . . . .	3
3	Comparaison : tuiles avec couleurs, tuiles avec dégradés . . . . .	3
4	Assemblage de tuiles avec creux et bosses . . . . .	4
5	Comparaison : tuiles avec dégradés, tuiles avec creux et bosses . . . . .	4
6	Comparaison : pente rationnelle, pente irrationnelle . . . . .	5
7	Pavage pour $p = \frac{1}{\varphi}$ . . . . .	6
8	Détermination des points de la coupe . . . . .	7
9	Partie d'un pavage de Penrose . . . . .	7
10	Condition d'alternance . . . . .	8
11	Règles locales pour forcer la condition d'alternance . . . . .	8
12	Nouveau pavage ( $u_0$ doublé) . . . . .	9
13	Ombre 3D 1-périodique du pavage, vecteur de périodicité . . . . .	9
14	Nouveau pavage ( $u_3$ doublé) . . . . .	10
15	Ombre 3D 0-périodique du pavage . . . . .	10
16	Bandes (1) et (2) . . . . .	12
17	Application de $M$ aux points de l'escalier . . . . .	13
18	Bandes (3) et (4) . . . . .	13
19	Construction du nouvel escalier . . . . .	14

## I Introduction

En 1974, Roger Penrose a inventé, en guise de divertissement, un puzzle constitué de 2 tuiles qui, en quantité suffisante, recouvrent tout le plan, mais d'une seule manière : c'est le *pavage de Penrose*. C'est un pavage apériodique (il n'est invariant par aucune translation) mais quasi-périodique (tout motif apparaissant dans le pavage réapparaît régulièrement).

En 1984, le chercheur Dan Shechtman, travaillant alors sur un alliage d'aluminium et de manganèse rapidement solidifié, observe une figure de diffraction ayant une symétrie d'ordre 5. Or pour qu'un matériau soit périodique, la symétrie ne peut qu'être d'ordre 2, 3, 4 ou 6 : c'est ainsi qu'on a découvert les *quasi-cristaux*. Pour les modéliser, on s'est intéressé à des travaux sur les fonctions presque-périodiques, ainsi que sur les pavages apériodiques, notamment le pavage de Penrose.

Après une brève exposition de différents types de tuiles, nous verrons diverses manières de créer un pavage. On détaillera celle qui nous intéresse particulièrement : la méthode de coupe et projection. Enfin, on tentera de formuler une conjecture à la lumière du travail de Socolar à propos de l'influence d'une règle locale, la condition d'alternance, sur le comportement d'un pavage.

## 2 Divers types de tuiles et leurs contraintes locales

**Définition.** Un *pavage de  $\mathbb{R}^n$*  est un recouvrement de  $\mathbb{R}^n$  par des compacts d'intérieurs disjoints appelés *tuiles*, modulo l'action d'un groupe d'isométries (translations, rotations...).

Des contraintes sur l'imbrication des tuiles peuvent forcer des contraintes globales, telles que l'apériodicité du pavage obtenu.

### 2.1 Avec couleurs ou nombres



FIGURE 1 – Assemblage de tuiles avec couleurs, avec nombres

Ces tuiles sont également appelées *tuiles de Wang*.

### 2.2 Avec dégradés de couleurs ou flèches



FIGURE 2 – Assemblage de tuiles avec dégradés, avec flèches

Avec ce jeu de tuiles, il n'est plus possible d'assembler deux tuiles identiques en appliquant à l'une d'elles une rotation de  $180^\circ$  par rapport à son centre (ceci est dû à l'orientation des flèches).



FIGURE 3 – Comparaison : tuiles avec couleurs, tuiles avec dégradés

### 2.3 Avec creux et bosses

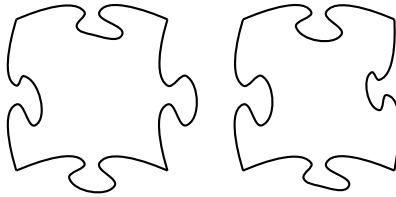


FIGURE 4 – Assemblage de tuiles avec creux et bosses

Avec ce jeu de tuiles, il n'est plus possible d'assembler deux tuiles identiques en appliquant à l'une d'elles une symétrie par rapport à une arête (ceci est dû à la complémentarité creux / bosse).

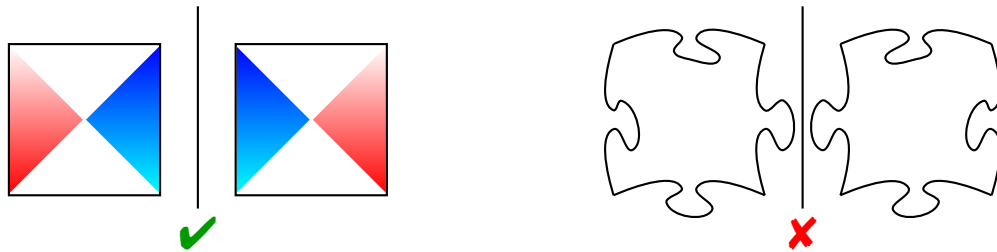


FIGURE 5 – Comparaison : tuiles avec dégradés, tuiles avec creux et bosses

## 3 Généralités sur les pavages

**Définition.** Un pavage est dit *k*-périodique s'il est invariant par *k* translations de vecteurs linéairement indépendants.

### 3.1 Pavages par substitution

On peut construire un pavage en appliquant des règles pour passer d'un certain motif à un autre : on parle de *règles de substitution*.

Par exemple, si l'on considère un jeu de tuiles *a* et *b*, de sorte à ce qu'on puisse réaliser les assemblages *aa*, *ab* et *ba*, soient les règles suivantes :

$$\begin{cases} b \rightarrow a \\ a \rightarrow ab \end{cases}$$

Si on part de  $F_0 = b$ , la substitution donne *a*, *ab*, *aba*, *abaab*, *abaababa* et ainsi de suite.

On remarque que chaque mot est la concaténation des deux mots qui le précèdent. Cette suite est appelée *suite des mots de Fibonacci* (la suite des longueurs des mots est la suite de Fibonacci, à l'exception de son premier terme).

### 3.2 Règles locales

Certaines règles d'assemblage des tuiles peuvent avoir une influence sur le comportement du pavage.

Ainsi, Jarkko Kari [4] a trouvé un jeu de 14 tuiles de Wang, qui est aperiodique : n'importe quel pavage infini composé de ces tuiles est 0-périodique. Kari l'a construit à l'aide d'automates de Mealy qui multiplient des séquences de Beatty de nombres réels par des constantes rationnelles. L'aperiodicité découle du fait qu'aucun produit non nul de termes 2 et  $\frac{2}{3}$  ne peut donner 1.

## 4 Coupe et projection

### 4.1 Généralités

Voici un moyen simple d'obtenir un pavage. Catapultons un carré unité ayant son coin supérieur droit en  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{N}^2$  selon une direction de pente  $p$ . Il décrit alors une bande. Relions maintenant les points de  $\mathbb{N}^2$  contenus dans la bande. Ils forment un escalier.

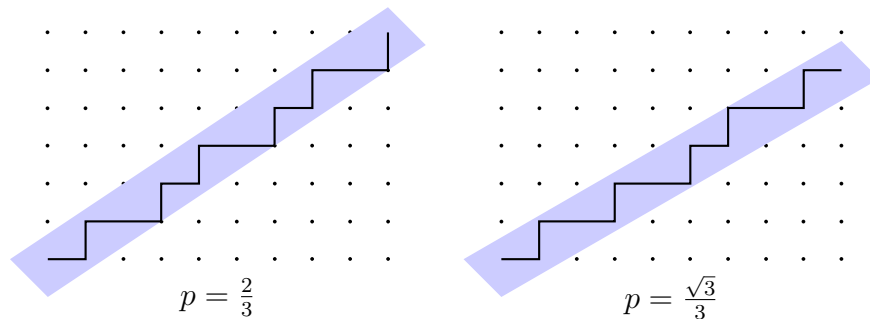


FIGURE 6 – Comparaison : pente rationnelle, pente irrationnelle

Quand  $p \in \mathbb{Q}$ , l'escalier est 1-périodique : en effet, la droite de direction  $p = \frac{y}{x}$  passant par  $(0, 0)$  touche un autre point du réseau :  $(x, y)$ . Donc le motif entre  $(0, 0)$  et  $(x, y)$  est répété indéfiniment.

Quand  $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , l'escalier est 0-périodique.

On peut ensuite projeter les points de l'escalier sur une droite de pente  $p$  pour obtenir un pavage constitué de deux tuiles.

En particulier, quand  $p = \frac{1}{\varphi}$  où  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , on obtient le pavage suivant :

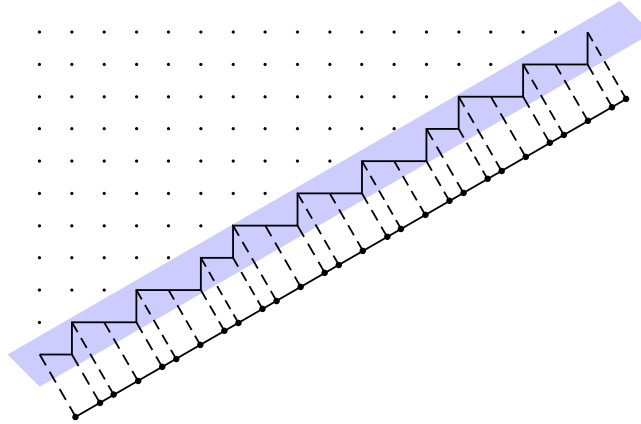
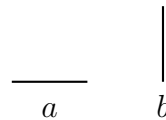


FIGURE 7 – Pavage pour  $p = \frac{1}{\varphi}$

Utilisons la correspondance suivante :



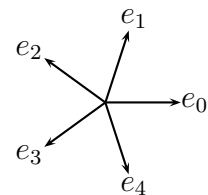
On remarque alors qu'on obtient :  $abaababaabaab\dots$ , qui est la séquence de Fibonacci. Une démonstration de cette particularité est en annexe.

Plus généralement, la méthode de coupe et projection consiste à prendre  $\mathbb{Z}^n$ , une translation de l'hypercube unité ( $\mathcal{H}$ ) et un espace vectoriel  $\mathcal{V}$ . En déplaçant  $\mathcal{H}$  selon  $\mathcal{V}$ , on obtient une bande, qui fait apparaître  $\mathbb{Z}^n \cap (\mathcal{H} + \mathcal{V})$ , que l'on projette sur  $\mathcal{V}$  parallèlement à un autre espace vectoriel  $\mathcal{W}$  (dans la figure ci-dessus, il s'agissait d'une droite perpendiculaire à  $\mathcal{V}$ ). On parle alors de *coupe et projection*  $n \rightarrow m$  où  $m = \dim \mathcal{V}$ .

## 4.2 Pavage de Penrose : $5 \rightarrow 2$

On peut obtenir un pavage de Penrose en appliquant la méthode de coupe et projection avec les données suivantes [1] :

- $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^5$  ;
- $\mathcal{H}$  : l'hypercube d'extrémités  $\{0, 1\}^5$  ;
- $\mathcal{V} = \text{Vect}(u, v)$  où  $u = \left(\cos \frac{2k\pi}{5}\right)_{k=0,\dots,4}$  et  $v = \left(\sin \frac{2k\pi}{5}\right)_{k=0,\dots,4}$  ;
- Une fois qu'on a déterminé les points de la coupe, on applique la projection  $p$  qui à un point  $z = (z_i)_{i=0,\dots,4}$  associe  $p(z) = \sum_{i=0}^4 z_i e_i$  du plan où  $e_i = \left(\cos \frac{2k\pi}{5}, \sin \frac{2k\pi}{5}\right)$ .



La difficulté réside dans le fait de déterminer si un point  $z$  appartient à la coupe.

**Définition :** Une *ombre 3D* d'un point  $z = (z_i)_{i=0,\dots,4}$  est un point  $z' = (z_a, z_b, z_c)$  où  $0 \leq a < b < c \leq 4$ . On note ce point  $p_{\{a,b,c\}}(z)$ . Déterminer une ombre 3D  $z'$  revient à choisir 3 coordonnées parmi les 5 de  $z$ . Une ombre 3D est aussi un pavage  $3 \rightarrow 2$ .

$z$  appartient à la coupe si et seulement si, pour chacun des  $\binom{5}{3} = 10$  triplets  $\{a, b, c\}$  tels que  $0 \leq a < b < c \leq 4$ ,  $z' = p_{\{a,b,c\}}(z)$  appartient à l'ombre 3D de la coupe, associée au cube unité  $\mathcal{H}'$  d'extrémités  $\{0, 1\}^3$  et au plan  $P = \text{Vect}(u', v')$  où  $u' = p_{\{a,b,c\}}(u)$  et  $v' = p_{\{a,b,c\}}(v)$ .

Intéressons-nous donc à un vecteur normal au plan  $P : w = u \wedge v$ .  $z'$  est dans la coupe si et seulement si il existe  $h_{min}$  et  $h_{max}$  extrémités de  $\mathcal{H}'$  telles que  $h_{min} \cdot w \leq z' \cdot w \leq h_{max} \cdot w$ .

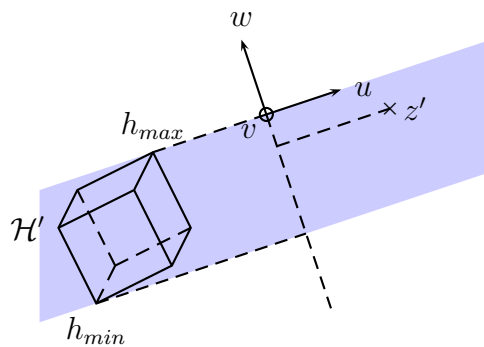


FIGURE 8 – Détermination des points de la coupe

On obtient finalement le pavage suivant :

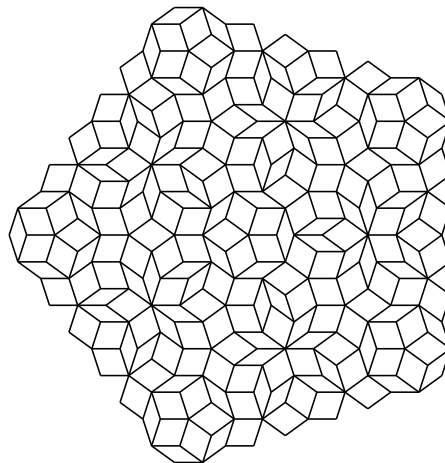


FIGURE 9 – Partie d'un pavage de Penrose

On peut obtenir d'autres pavages en ne changeant pas les vecteurs du plan de coupe mais le centre de l'hypercube unité  $\mathcal{H}$ . Les pavages obtenus sont dits *parallèles* à celui-ci.

## 5 Condition d'alternance

### 5.1 Dans le pavage de Penrose

**Définition :** Une  $n$ -ligne dans le pavage est un chemin bi-infini constitué de tuiles se touchant en des arêtes parallèles à  $e_n$ .

Socolar [6] montre que, si dans chaque  $n$ -ligne, il y a, pour les tuiles épaisses comme pour les tuiles fines, alternance entre tuile montante et tuile descendante, alors le pavage obtenu est parallèle à Penrose.

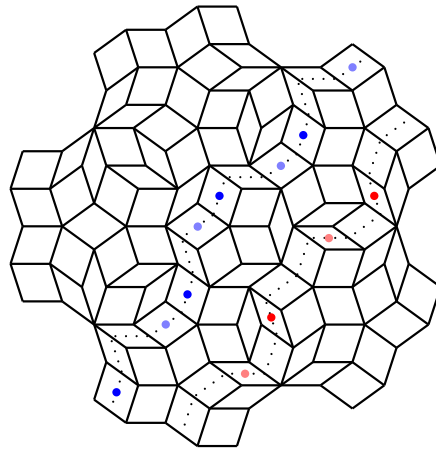


FIGURE 10 – Condition d'alternance

Ici, deux 2-lignes sont marquées en pointillés. On voit bien l'alternance des tuiles épaisses (en bleu) et celle des tuiles fines (en rouge).

**Définition :** Soit une  $n$ -ligne formée des tuiles  $(q_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , deux tuiles consécutives dans la séquence étant adjacentes dans le pavage. Une condition d'alternance sur cette  $n$ -ligne est une séquence finie  $(p_1, \dots, p_k)$  de types de tuiles telle que, en ne conservant que ces types de tuiles dans  $(q_n)$ , on obtient une séquence périodique de motif  $(p_1, \dots, p_k)$ .

**Exemple :** Ci-dessus, pour chaque  $n$ -ligne, la condition d'alternance est  $(a, b)$  (tuiles fines ou tuiles épaisses). On peut construire des tuiles telles que tout pavage qu'elles construisent suive la condition d'alternance représentée ci-dessus.

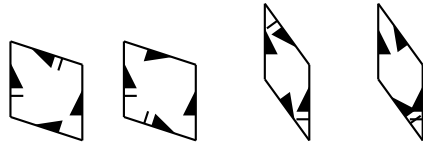


FIGURE 11 – Règles locales pour forcer la condition d'alternance

Ces tuiles doivent être assemblées de façon à former des flèches (cf. Figure 2).



## 5.2 Changement des vecteurs de coupe, impact sur la condition d'alternance

On peut modifier le comportement du pavage en modifiant une coordonnée d'un des vecteurs de coupe. Par exemple, si on double la première composante de  $u$  :

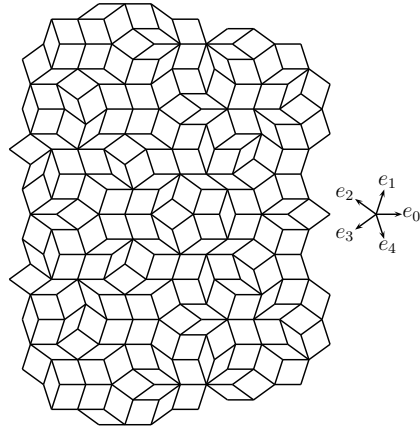


FIGURE 12 – Nouveau pavage ( $u_0$  doublé)

L'alternance change aussi :

$n$ -ligne	Tuiles épaisses	Tuiles fines
0	normal	normal
1	$aab$	normal
2	normal	$abb$
3	normal	$aab$
4	$abb$	normal

Par ailleurs, on peut vérifier que toutes les ombres 3D de ce pavage sont 1-périodiques.

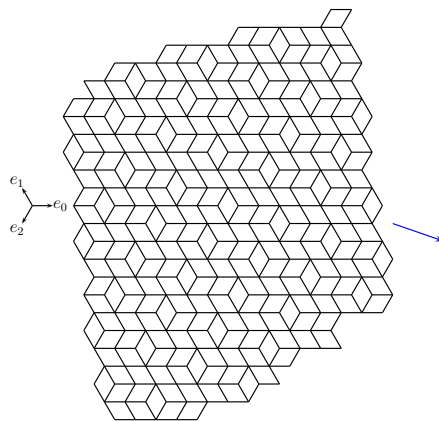


FIGURE 13 – Ombre 3D 1-périodique du pavage, vecteur de périodicité

Dans cette ombre, on peut retrouver la séquence de Fibonacci (cf. Figure 7).

Si on double la quatrième composante de  $u$ , on obtient la figure suivante.

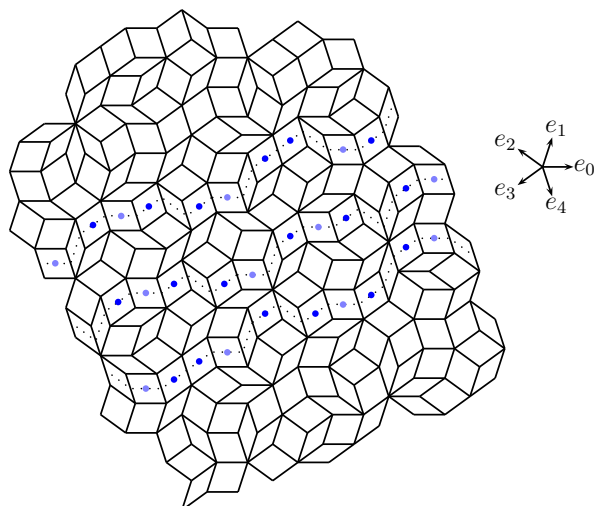


FIGURE 14 – Nouveau pavage ( $u_3$  doublé)

Dans les 4-lignes marquées en pointillés, on lit :  $babaabaaba$  (pour plus de clarté, on les lira dans cet ordre, bien que la ligne soit inversée),  $abaababaab$  et  $baabaabaab$ . Il n'est donc pas possible d'en extraire une condition d'alternance. De plus, on peut voir sur la figure suivante que l'ombre 3D donnée par  $p_{\{1,3,4\}}$  est 0-périodique :

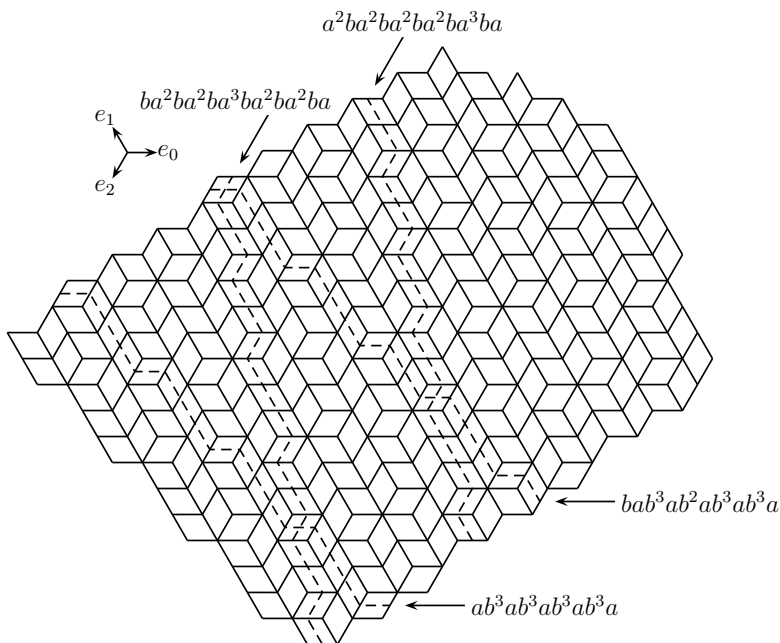


FIGURE 15 – Ombre 3D 0-périodique du pavage

Les 0-lignes ne sont pas périodiques, et les pointillés nous laissent penser que les 1-lignes et 2-lignes ne le sont pas non plus.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

*Si les 10 ombres 3D d'un pavage  $5 \rightarrow 2$  sont 1-périodiques, alors il existe des conditions d'alternance qui caractérisent ledit pavage  $5 \rightarrow 2$ , à décalage près.*

Une condition d'alternance force la périodicité de sous-suites extraites d'une bande, ce qui peut toujours se coder par des règles locales.

Si jamais cette conjecture se révélait être vraie, cela signifierait donc qu'on pourrait trouver des règles locales pour de tels pavages.

## 6 Conclusion

À ce jour, il existe trois méthodes pour construire des jeux de tuiles apériodiques :

- substitutions (travaux de Mozes [5] et de Goodman-Strauss [2]) ;
- calculs sur les « couleurs » de tuiles (Kari [4]) ;
- alternance de tuiles dans une ligne (Socolar [6]).

L'intérêt principal des conditions d'alternance est qu'elles fournissent des règles locales assez simples. Nous avons tenté ici d'en trouver pour des pavages obtenus en modifiant légèrement des vecteurs du plan de coupe associé au pavage de Penrose.

# A Démonstration du lien entre l'escalier associé à $\frac{1}{\varphi}$ et la séquence de Fibonacci

Cette démonstration s'inspire de celle d'Edmund O. Harriss [3].

## Initialisation

Soit  $(F_n)$  la suite des mots de Fibonacci.  
 On rappelle que  $F_0 = b$ ,  $F_1 = a$  et  $\forall n \geq 2, F_n = F_{n-1}F_{n-2}$ .  
 L'escalier commence par  $F_1 = a$ .

## Hypothèse de récurrence

Pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'escalier commence par  $F_n$ .

## Démonstration

On remarque que les points de l'escalier occupent deux parties de la bande. Appelons-les (1) et (2).

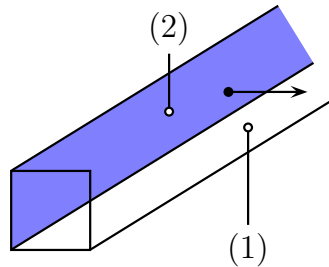


FIGURE 16 – Bandes (1) et (2)

Les points de (1) sont forcément suivis d'une barre verticale. Ceux de (2) d'une barre horizontale.

### Propriété 1 :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (1) &\Leftrightarrow -\varphi \leq \varphi y - x < -\varphi + 1 \\ (x, y) \in (2) &\Leftrightarrow -\varphi + 1 \leq \varphi y - x < 1 \end{aligned}$$

**Démonstration :** Pour que  $(x, y)$  soit :

- au-dessus de la droite du bas (passant par  $(0, -1)$ ), il faut que  $\frac{y+1}{x} \geq \frac{1}{\varphi}$  ;
  - en dessous de la droite du milieu (passant par  $(-1, -1)$ ), il faut que  $\frac{y+1}{x+1} \leq \frac{1}{\varphi}$  ;
  - strictement en dessous de la droite du haut (passant par  $(-1, 0)$ ), il faut que  $\frac{y}{x+1} < \frac{1}{\varphi}$ .
- Ce qui donne les inégalités cherchées.

Appliquons maintenant aux points de l'escalier la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc  $Ma = a + b$  et  $Mb = a$ .

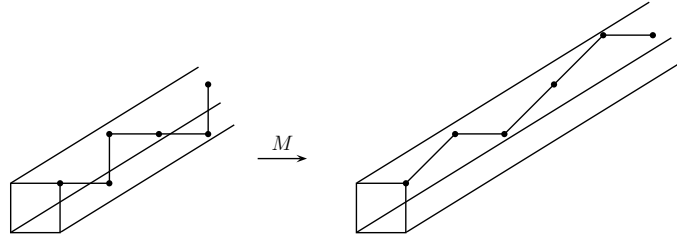


FIGURE 17 – Application de  $M$  aux points de l'escalier

**Propriété 2 :** Si  $z = (x, y)$  est dans la bande,  $Mz \in (2)$ .

**Démonstration :**  $z' = Mz = (x + y, x) = (x', y')$ .

$$\begin{aligned} \varphi y' - x' &= \varphi x - (x + y) \\ &= \varphi x - x - (\varphi^2 - \varphi)y \\ &= (1 - \varphi)(\varphi y - x) \end{aligned}$$

Donc d'après la propriété 1,  $-\varphi + 1 < \varphi y' - x' < 1$ ,  $z' \in (2)$ .

On remarque que les nouveaux points occupent deux parties de (2). Appelons-les (3) et (4).

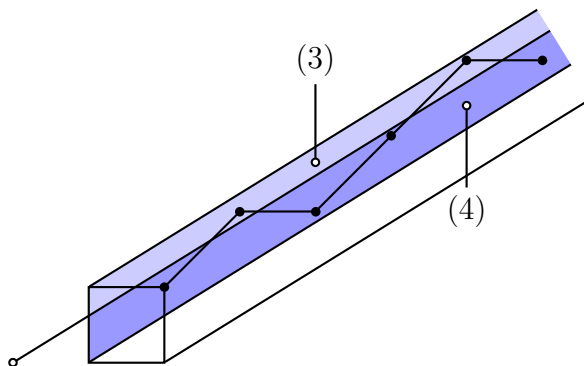


FIGURE 18 – Bandes (3) et (4)

De même, les points de (3) sont forcément suivis d'une barre horizontale. Ceux de (2) d'une barre oblique.

Maintenant que  $M$  a été appliqué, pour que le nouvel escalier (à savoir,  $F_{n+1}$ ) soit terminé, il faut ~~une rampe~~ remplacer les traits obliques (correspondant à  $Ma$ ) par  $a + b$ . Par conséquent, il faut, pour chaque point  $z$  dans (4), tracer  $z + a$ .

Or, comme, par construction, (1) est la translation de (4) par  $a$ , ces points nouvellement construits seront dans (1).

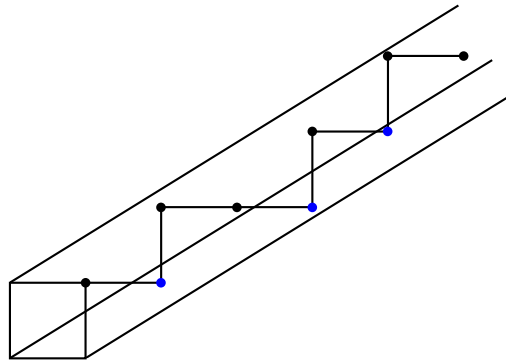


FIGURE 19 – Construction du nouvel escalier

$F_{n+1}$  est dans la bande. On a donc prouvé que l'escalier commençait par  $F_{n+1}$ .

Finalement, l'escalier est exactement la séquence de Fibonacci. □

## Références

- [1] F. Gähler and J. Rhyner. Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :267–277, 1986.
- [2] Chaim Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, 147 :181–223, 1998.
- [3] Edmund O. Harriss. *On Canonical Substitution Tilings*. PhD thesis, Imperial College, London, 2004.
- [4] Jarkko Kari. A small aperiodic set of wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 :259–264, 1996.
- [5] Shahar Mozes. Tilings, substitution systems and dynamical systems generated by them. *Journal d'analyse mathématique*, 53, 1989.
- [6] Joshua E. S. Socolar. Weak matching rules for quasicrystals. *Communication in Mathematical Physics*, 129 :599–619, 1990.