TP n° 8 – Algèbre linéaire

vie@jill-jenn.net/tp
thomas.h@ens.fr

1 Oups !

Yorel Reivax étudie la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 2(x_n + 0{,}1) - 1{,}2$.

```
let suivant x = 2. *. (x +. 0.1) -. 1.2;;

let rec x = function
  | 0 -> 1.
  | n -> suivant (x (n-1))
;;
```

Question 1. Quel est le problème de ce code ?

2 Matrices

Question 2. Quelles méthodes connaissez-vous pour calculer le déterminant d'une matrice ? Quelles sont les complexités de ces méthodes ?

Question 3. Écrire une fonction `det` qui, étant donné une matrice carrée, calcule [1] son déterminant.

Question 4. Votre fonction risque d'accumuler des erreurs d'arrondi. Comment y remédier ? Quels sont les inconvénients de votre méthode ?

Question 5. Écrire la fonction `inverse` qui, étant donné une matrice carrée, calcule [2] son inverse.

3 Polynômes

Nous allons représenter un polynôme par un tableau de coefficients [3].

Question 6. Écrire les fonctions `plus`, `moins` et `fois` qui additionnent, soustraient et multiplient des polynômes.

Question 7. Écrire la fonction `eval` qui prend un polynôme P et un nombre x et détermine $P(x)$ en temps linéaire.

Question 8. Pouvez-vous écrire une fonction `racines` qui calcule les racines d'un polynôme ?

Question 9. Écrire la fonction `lagrange` qui étant donné une liste de n points de type `(float * float) list` renvoie le polynôme de degré minimal passant par ces points.

1. En temps polynomial bien évidemment. On pourra utiliser le pivot de Gauss.
2. Avec une complexité raisonnable.
3. Le polynôme $7x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ sera représenté par le tableau `[|1.; 3.; 3.; 7.|]`.

Question 10. Utiliser les questions précédentes pour écrire la fonction `polynome_car` qui étant donné une matrice carrée calcule son polynôme caractéristique.

4 Méthodes numériques

La recherche des racines d'un polynôme étant impossible avec des méthodes formelles, nous allons explorer des méthodes numériques.

Question 11. Pour un polynôme donné, trouver une borne sur la valeur absolue de ses racines.

4.1 Échantillonnage

Une méthode de recherche de racines consiste à échantillonner l'intervalle de recherche (c'est-à-dire évaluer le polynôme en plusieurs points) pour trouver deux points entre lesquels le polynôme change de signe. On sait alors qu'une racine se situe entre ces deux points et on peut donc recommencer en réduisant l'intervalle de recherche jusqu'à atteindre la précision voulue.

Question 12. Écrire la fonction `echantillonnage` qui prend un polynôme et une précision et retourne une liste de racines trouvées par la méthode précédente.

Question 13. Quelle est la vitesse de convergence [4] de cette méthode ?

4.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet une convergence bien plus rapide. Elle consiste à approcher une fonction par son développement limité d'ordre 1 et à résoudre l'équation obtenue. Par exemple, pour calculer une valeur approchée de la racine de $P = X^2 - 2$ en partant du point 1, elle effectue les calculs suivants :

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1{,}0000; \quad P(1) + (x_1 - 1)P'(1) = -1 + 2(x_1 - 1) = 0 \\
x_1 &= 1{,}5000; \quad P(1{,}5) + (x_2 - 1{,}5)P'(1{,}5) = 0{,}25 + 3(x_2 - 1{,}5) = 0 \\
x_2 &= 1{,}4167; \quad P(1{,}4167) + (x_3 - 1{,}4167)P'(1{,}4167) = 0 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Question 14. Écrire la fonction `derive` qui étant donné un polynôme P calcule P'.

Question 15. Écrire la fonction `newton` qui implémente cette méthode.

Question 16. Quelle est la vitesse de convergence de la méthode de Newton ?

4. Nombre de bons chiffres obtenus ($-\log$ précision) en fonction du nombre d'opérations effectuées.