

La fin du monde approchant à grands pas, tous les MP sans exception<sup>1</sup> se rendent à Bugarach, seul refuge<sup>2</sup>. Manque de pot, il ne reste plus qu'une place dans le bus, vous décidez donc de vous départager en vous livrant à quelques petits **jeux**.

## 1 Oups !

Yorel Reivax a encore fait une bêtise, laquelle ?

---

```
let list_of_string s =
  let n = string_length s in
  let rec aux i = match i with
    | n -> []
    | i -> s.[i]::(aux (i + 1))
  in aux 0
;;
```

---

## 2 La Dernière Lettre avant la fin du monde

Étant donné un dictionnaire de mots valides, on considère le **jeu** à deux joueurs où à tour de rôle, chaque joueur énonce une lettre de sorte à former un mot. La suite de lettres des deux joueurs doit toujours être un préfixe d'un des mots du dictionnaire. Celui qui ne peut plus **jouer** a perdu. Vous commencez.

L'*arbre des préfixes* ou *trie* d'un dictionnaire est un arbre dont les arêtes sont étiquetées par des lettres tel que tout chemin de la racine à une feuille forme un mot du dictionnaire et il existe un tel chemin pour chaque mot du dictionnaire.

**Question 1.** Écrire une fonction `make_trie` qui étant donné un dictionnaire (`string list`) en construit l'arbre des préfixes.

Il est possible de partitionner les nœuds de cet arbre en deux ensembles, ceux à partir desquels vous êtes sûr de gagner quoi que fasse votre adversaire (position gagnante), et ceux où vous êtes sûr de perdre, si on considère que votre adversaire joue de manière optimale (position perdante).

---

```
type position = Gagnante | Perdante;;
```

---

L'algorithme min-max permet de trouver une stratégie optimale pour le premier joueur en attribuant à chaque nœud un score<sup>3</sup> qui est pour les nœuds de profondeur impaire (respectivement paire), le minimum (respectivement maximum) des scores des fils.

**Question 2.** Écrivez une fonction qui attribue son type de position à chacun des nœuds de l'arbre.

- 
1. `failwith "Sauf ceux qui ne se sont pas encore inscrits sur admission-postbac, soit : tous."`
  2. « Depuis le temps, j'en ai vu des cinglés. Je les appelle les « tracassés du pic ». Avec cette histoire de fin du monde, ils sont de plus en plus nombreux » — Le maire de Bugarach
  3. Le score est 1 pour les positions gagnantes et -1 pour les positions perdantes.

**Question 3.** Écrivez une fonction `coup` qui prend en argument un mot en cours de construction (initialement vide) et retourne une lettre à jouer pour être sûr de gagner.

Compliquons un peu les choses, considérons maintenant le langage décrit non plus par un dictionnaire fini mais par un automate fini déterministe.

---

```
type automate = {nb_etats : int; transition : int vect vect; final : bool vect};;
(* En lisant la lettre a depuis l'état q, on arrive dans l'état
 * transition.(q).(int_of_char a)
 * L'état initial est l'état 0
 * L'état q est final ssi final.(q) *)
```

---

Cette fois-ci l'arbre du jeu peut être infini. Cependant tous les nœuds correspondant à un même état de l'automate sont équivalents.

**Question 4.** Pouvez-vous utiliser l'algorithme min-max pour traiter un automate au lieu d'un arbre ?

**Question 5.** Trouver une fonction dont le point fixe donne le type de position (possiblement infinie) correspondant à chacun des états.

**Question 6.** Implémenter cette fonction.

### 3 La Dernière Allumette avant la fin du monde

Nous allons à présent nous intéresser plus généralement à des jeux à deux joueurs à information parfaite. De tels jeux peuvent être représentés par un arbre (possiblement infini) où chaque nœud représente un état du jeu et un nœud  $a$  est fils d'un nœud  $b$  si et seulement s'il existe une action du joueur permettant de passer de l'état  $a$  à l'état  $b$ . Les feuilles contiennent les scores des joueurs<sup>4</sup>.

---

```
type ('a, 'b) jeu = Nœud of ('a * ('a, 'b) jeu) list | Feuille of 'b;;
(* 'a est le type des actions et 'b celui du score *)
```

---

Le joueur 0 joue aux nœuds de profondeur paire et le joueur 1 aux nœuds de profondeur impaire.

**Question 7.** Écrire la fonction `min_max` qui prend un jeu et retourne le même jeu où les actions sont remplacées par le couple `(action, score)`.

On considère le jeu des allumettes où le joueur qui ne peut plus jouer perd. Le jeu commence avec  $n$  allumettes puis à tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2, 3 ou 5 allumettes mais jamais autant que l'autre joueur au tour précédent.

**Question 8.** Écrire la fonction `allumette` qui prend l'entier  $n$  et retourne l'arbre correspondant à ce jeu.

### 4 Le Dernier Nombre de $\mathbb{N}$ avant la fin du monde

Pour certains automates, la partie peut durer indéfiniment. Nous allons modifier les règles du jeu de la façon suivante : le joueur 0 gagne s'il passe un nombre infini de fois par des états finaux.

**Question 9.** Adaptez les fonctions précédentes pour ces nouvelles règles.

---

4. Pour des jeux à somme nulle, il suffit d'indiquer uniquement le score du joueur 0.