917. Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

1 Définitions

1.1 Aspects syntaxiques

Définition 1. On considère

1. un ensemble $\mathcal{V}$ infini dénombrable de *variables individuelles* $x, y, \ldots$;
2. un ensemble $\mathcal{F}$ au plus dénombrable de *symboles de fonction* $f, g, \ldots$;
3. un ensemble $\mathcal{P}$ au plus dénombrable de *symboles de prédicat* $P, Q, \ldots$.

$\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \varnothing$ et m désigne la *fonction d'arité*, définie de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition 2. Soit $X \neq \varnothing$ un ensemble, F_n un ensemble de fonctions d'arité $n \in \mathbb{N}$, $F = \cup_{n \geqslant 0} F_n$. On définit par induction l'*algèbre libre* $T(X, F)$:

1. $X \subset T(X, F)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in F_n, \forall t_1, \ldots, t_n \in T(X, F)$, $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(X, F)$.

Définition 3. On définit l'ensemble des *termes* $\mathcal{T}$ comme la clôture des variables par les symboles de fonction :

$$\mathcal{T} = T(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Définition 4. On appelle *atome* toute application d'un symbole de prédicat d'arité n à n termes. Par fantaisie, on note $\mathcal{P}\mathcal{T}^* = \cup_{n \geqslant 0} \mathcal{P}_n(\mathcal{T}^n)$ l'ensemble des atomes où $\mathcal{P}_n = m^{-1}(n) \cap \mathcal{P}$.

Définition 5. On définit l'ensemble des *formules* $\mathcal{O}$ comme la clôture des atomes par les connecteurs logiques et les quantificateurs :

$$\mathcal{O} = T(\mathcal{P}\mathcal{T}^*, \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow\} \cup \{\forall x\}_{x \in \mathcal{V}} \cup \{\exists x\}_{x \in \mathcal{V}}).$$

Remarque 6. On peut représenter chaque terme (resp. formule) par un arbre enraciné dont les nœuds internes sont des symboles de fonction (resp. des connecteurs logiques ou des quantificateurs) et les feuilles sont des variables (resp. atomes).

Définition 7. On définit les *variables libres* (fv) et *liées* (bv) d'un terme ou d'une formule par induction :

1. pour tout terme ou atome S, $\mathrm{bv}(S) = \varnothing$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \cup \mathcal{P}, \mathrm{fv}(A(t_1, \ldots, t_{m(A)})) = \mathrm{fv}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{fv}(t_{m(A)})$
3. $\mathrm{fv}(\neg\Phi) = \mathrm{fv}(\Phi)$, idem pour bv ;
4. $\forall \star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}, \mathrm{fv}(\Phi \star \Phi') = \mathrm{fv}(\Phi) \cup \mathrm{fv}(\Phi')$, idem pour bv ;
5. $\mathrm{fv}(\forall x, \Phi) = \mathrm{fv}(\exists x, \Phi) = \mathrm{fv}(\Phi) \setminus \{x\}$
6. $\mathrm{bv}(\forall x, \Phi) = \mathrm{bv}(\exists x, \Phi) = \mathrm{bv}(\Phi) \cup \{x\}$

Un terme ou formule S est dit *clos* si $\mathrm{fv}(S) = \varnothing$.

Exemple 8. Dans la formule $P(x) \wedge \forall x P(x)$, x est à la fois libre et liée.

Définition 9. On appelle *théorie* un ensemble de formules closes.

Définition 10. On appelle *substitution* une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{T}$ telle que le *domaine* $\mathrm{dom}\,\sigma = \{x \in V, x \neq \sigma(x)\}$ est fini. Si $\mathrm{dom}\,\sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on note aussi $\sigma = [x_1 \mapsto \sigma(x_1), \ldots, x_n \mapsto \sigma(x_n)]$. $\diamond$ désigne la substitution vide.

Remarque 11. On peut prolonger une substitution σ de manière unique sur $\mathcal{T}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $f \in \mathcal{F}_n$ et pour tous termes $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$: $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$.

Définition 12. Soit t un terme. On appelle *instance* tout terme de la forme $t\sigma$, où σ est une substitution.

1.2 Aspects sémantiques

Définition 13. On appelle *interprétation* la donnée de trois ensembles :

1. un *domaine d'interprétation* $D_I \neq \varnothing$;
2. pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $f \in \mathcal{F}_n$, une fonction $I(f) : D_I^n \to D_I$
3. pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $P \in \mathcal{P}_n$, une fonction $P(f) : D_I^n \to \{\top, \bot\}$

Définition 14. On appelle *affectation* une fonction de $\mathcal{V}$ dans D_I.

Définition 15 (Sémantique)**.** Pour chaque affectation ρ, on note $\rho[v/x]$ l'affectation qui envoie x sur v et toute autre variable y sur $\rho(y)$. Dans une interprétation I et selon une affectation ρ, la sémantique des termes et formules est donnée par :

1. $[\![x]\!]I\rho = \rho(x)$;
2. $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]I\rho = I(f)([\![t_1]\!]I\rho, \ldots, [\![t_n]\!]I\rho)$;
3. $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]I\rho = I(P)([\![t_1]\!]I\rho, \ldots, [\![t_n]\!]I\rho)$;
4. $[\![\neg\Phi]\!]I\rho = \neg[\![\Phi]\!]I\rho$;
5. $[\![\Phi \vee \Phi']\!]I\rho = [\![\Phi]\!]I\rho \vee [\![\Phi']\!]I\rho$;
6. $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]I\rho = [\![\Phi]\!]I\rho \wedge [\![\Phi']\!]I\rho$;
7. $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]I\rho = [\![\Phi]\!]I\rho \Rightarrow [\![\Phi']\!]I\rho$;
8. $[\![\forall x, \Phi]\!]I\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]I(\rho[v/x])$
9. $[\![\exists x, \Phi]\!]I\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]I(\rho[v/x])$

Remarque 16. Soit S un terme ou une formule du premier ordre. Si S est clos, alors pour toute interprétation I, $[\![S]\!]I\rho$ est indépendant de ρ. On note alors $[\![S]\!]I$ la valeur commune.

Définition 17. Une formule est dite *valide* si elle est vraie dans toute interprétation selon toute affectation (dans le cas contraire, elle est dite *invalide*). Elle est dite *insatisfiable* si elle est fausse dans toute interprétation selon toute affectation (dans le cas contraire, elle est dite *satisfiable*).

Proposition 18. Pour toute substitution σ, toute interprétation I et toute affectation ρ, on note $\sigma\rho$ l'affectation envoyant chaque variable x sur $[\![\sigma(x)]\!]I\rho$. On a alors pour toute formule F, toute substitution σ, toute interprétation I et toute affectation ρ : $[\![F\sigma]\!]I\rho = [\![F]\!]I(\sigma\rho)$.

Définition 19. Soit Φ une formule close du premier ordre. On appelle *modèle* de Φ une interprétation I qui satisfait Φ, c'est-à-dire telle que $[\![\Phi]\!]I = \top$. On note alors $I \models F$.

Remarque 20. Cette définition est étendue aux théories.

2 Propriétés particulières

2.1 Formes prénexes, de Herbrand et de Skolem

Définition 21. Une formule est dite *prénexe* si elle est de la forme $Q_1x_1, \ldots, Q_nx_n, \Phi$ où $Q_1, \ldots, Q_n$ sont des quantificateurs et Φ est sans quantificateur. Si de plus tous les quantificateurs sont existentiels (resp. universels), elle est dite *existentielle* (resp. *universelle*).

Théorème 22. Soit Φ une formule du premier ordre. Alors il existe une formule prénexe Φ' effectivement calculable à partir de Φ et sémantiquement et prouvablement équivalente à Φ.

Théorème 23 (Herbrand-Skolem)**.** Soit Φ une formule du premier ordre. Alors il existe une formule existentielle Φ' effectivement calculable et valide si et seulement si Φ est valide. On dit que Φ' est une *forme de Herbrand* de Φ. De même, il existe une formule universelle Φ' effectivement calculable et insatisfiable si et seulement si Φ' est insatisfiable. On dit que Φ' est une *forme de Skolem* de Φ.

Remarque 24. La mise sous forme de Herbrand ne conserve la validité et la prouvabilité, la mise sous forme de Skolem conserve que la satisfiabilité et la cohérence, mais les formules obtenues ne sont pas logiquement équivalentes aux formules initiales.

2.2 Théorie sémantique de Herbrand

Définition 25. On se donne un ensemble de *constantes de base* choisi nul si $\mathcal{F}$ a déjà des symboles constants, c'est-à-dire d'arité 0.

Exemple 26. $B_0 = \begin{cases} \varnothing & \text{si } 0 \in m(\mathcal{F}) \\ \{x\} & \text{sinon} \end{cases}$ est le plus petit tel ensemble.

Définition 27. On appelle *univers de Herbrand* sur B et on note $H(B)$ l'ensemble des termes clos $T(B, \mathcal{F})$.

Remarque 28. $H(B) \neq \varnothing$ pour tout choix de B.

Définition 29. On appelle *interprétation de Herbrand* un sous-ensemble I des atomes clos $\{P(t_1, \ldots, t_{m(P)}), P \in \mathcal{P}, t_1, \ldots, t_{m(P)} \in T(B, \mathcal{F})\}$. I définit une interprétation sur $H(B)$ qu'on note encore I :

1. $D_I = H(B)$;
2. $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$;
3. $I(P)(t_1, \ldots, t_n) = \top \Leftrightarrow P(t_1, \ldots, t_n) \in I$.

Lemme 30. Soit I une interprétation sur un univers de Herbrand $H(B)$. Alors il existe une interprétation de Herbrand I' sur $H(B)$ telle que pour toute formule Φ et pour toute affectation ρ, on a : $[\![\Phi]\!]I\rho = [\![\Phi]\!]I'\rho$.

Théorème 31. Soit Φ une formule existentielle du premier ordre. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Φ est valide ;
2. pour chaque univers de Herbrand $H(B)$, Φ est satisfaite par chaque interprétation de Herbrand sur B ;
3. Φ est satisfaite par chaque interprétation de Herbrand sur B_0.

Développement 1 (Théorème de Herbrand)**.** Soit Φ une formule existentielle du premier ordre, c'est-à-dire de la forme $\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \Psi$ où Ψ est sans quantificateur. On suppose que $\mathcal{F}$ contient au moins un symbole constant. Alors Φ est valide si et seulement s'il existe un entier k et k instances closes $\Psi\sigma_1, \ldots, \Psi\sigma_k$ de Ψ telles que $\Psi\sigma_1 \vee \ldots \vee \Psi\sigma_k$ est valide en tant que formule propositionnelle.

Corollaire 32. Soit Φ une formule universelle du premier ordre, c'est-à-dire de la forme $\forall x_1, \ldots, \forall x_n, \Psi$ où Ψ est sans quantificateur. On suppose que $\mathcal{F}$ contient au moins un symbole constant. Alors Φ est insatisfiable si et seulement s'il existe un entier k et k instances closes $\Psi\sigma_1, \ldots, \Psi\sigma_k$ de Ψ telles que $\Psi\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Psi\sigma_k$ est insatisfiable en tant que formule propositionnelle.

Théorème 33. L'ensemble des formules valides du premier ordre est récursivement énumérable.

Développement 2 (Indécidabilité de la logique du premier ordre)**.** Il n'existe pas d'algorithme décidant la validité des formules du premier ordre.

Dans ce qui suit, Φ désigne une formule du premier ordre.

Théorème 34. Si $\Gamma \models \Phi$, alors il existe un sous-ensemble fini Δ de Γ tel que $\Delta \models \Phi$.

Théorème 35 (Löwenheim-Skolem)**.** Si Φ a un modèle infini comprenant le prédicat d'égalité, alors il a des modèles comprenant le prédicat d'égalité de tous les cardinaux infinis.

2.3 Théorie syntaxique de Herbrand

Définition 36 (Système de Gentzen **LK**)**.**

$$\frac{}{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Delta, \Phi}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi, \Phi' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Phi \wedge \Phi' \longrightarrow \Delta}\ \wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \wedge \Phi'}\ \wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma, \Phi' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Phi \vee \Phi' \longrightarrow \Delta}\ \vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi, \Phi'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \vee \Phi'}\ \vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \qquad \Gamma, \Phi' \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Phi \Rightarrow \Phi' \longrightarrow \Delta}\ \Rightarrow\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Delta, \Phi'}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \Rightarrow \Phi'}\ \Rightarrow\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \longrightarrow \Delta}\ \neg\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, \Phi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\Phi}\ \neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi[t/x] \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x, \Phi \longrightarrow \Delta}\ \forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi[y/x]}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x, \Phi}\ \forall\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi[y/x] \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x, \Phi \longrightarrow \Delta}\ \exists\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi[t/x]}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x, \Phi}\ \exists\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \Phi \qquad \Gamma', \Phi \longrightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \Delta, \Delta'}\ \mathrm{Cut}$$

Pour les règles $\forall$R et $\exists$L, il faut que $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma) \cup \mathrm{fv}(\Delta)$.

Théorème 37. Un séquent $\Gamma \longrightarrow \Delta$ est prouvable dans **LK** si et seulement s'il est prouvable dans **LK** sans la règle de Cut.

Corollaire 38. Le système **LK** est cohérent.

Théorème 39 (Théorème de Herbrand syntaxique)**.** Soit Φ une formule existentielle du premier ordre, c'est-à-dire de la forme $\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \Psi$ où Ψ est sans quantificateur. Si $\longrightarrow \Phi$ est prouvable dans **LK**, alors il existe un entier k et k instances $\Psi\sigma_1, \ldots, \Psi\sigma_k$ de Ψ telles que $\longrightarrow \Psi\sigma_1, \ldots, \Psi\sigma_k$ est prouvable dans **LK**.

Théorème 40 (Herbrand-Skolem syntaxique)**.** Soit Φ une formule, Ψ_H une de ses formes de Herbrand, Ψ_S une de ses formes de Skolem. Alors Φ est prouvable dans **LK** si et seulement si Ψ_H l'est. Φ est cohérente dans **LK** si et seulement si Ψ_S est cohérente dans **LK**.

Théorème 41. **LK** est correct et complet pour la sémantique de la logique classique du premier ordre, c'est-à-dire que pour toute formule Φ, on a $\models \Phi \Leftrightarrow \vdash^{\mathbf{LK}} \Phi$.

Développements	**Références**
Théorème de Herbrand	Goubault-Larrecq
Indécidabilité de la logique du 1er ordre	David