240. Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

1 Généralités

Dans tout ce qui suit, on considère un entier $d \in \mathbb{N}$.

1.1 Définition

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Définition 1. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On définit alors le *produit de convolution* $f \star g$ de f et g par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt.$$

Proposition 2. $f \star g = g \star f$.

Proposition 3. $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4. $||f \star g||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$.

Corollaire 5. $(L^1(\mathbb{R}), +, \star, ||\cdot||_1)$ est une algèbre de Banach commutative.

Remarque 6. Cette algèbre ne possède pas d'unité.

Définition 7. On désigne par $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions mesurables g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ *localement intégrables*, c'est-à-dire telles que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$\int_K |g| d\lambda < +\infty.$$

Définition 8. Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, on désigne par $C^k_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω *à support compact*, c'est-à-dire :

$$C^k_c(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega), \exists K \subset \Omega \text{ compact}, \forall x \in \Omega \setminus K, f(x) = 0\}.$$

Proposition 9. Soit $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leqslant k$,

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g.$$

1.2 Régularisation

Définition 10. On appelle *approximation de l'unité* toute suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \geqslant 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \rho_n(x)dx = 0.$$

Si de plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, on dit que (ρ_n) est une *suite régularisante*.

Exemple 11 (Noyaux de Laplace, Cauchy, Gauss)**.**

$$\rho_n^L(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}} \qquad \rho_n^C(x) = \frac{n}{\pi(n^2 + x^2)} \qquad \rho_n^G(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}n)^d} e^{-\frac{|x|^2}{2n^2}}$$

sont des approximations de l'unité.

Exemple 12 (Suite régularisante)**.**

$$\rho_n(x) = \frac{n^d \rho(nx)}{\int \rho} \text{ où } \rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 13. Soit f continue sur $\mathbb{R}^d$, (ρ_n) une suite régularisante. Alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 14. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant p < \infty$, (ρ_n) une suite régularisante. Alors $\rho_n \star f$ converge vers f pour $||\cdot||_p$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 15. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, p un entier tel que $1 \leqslant p < \infty$. Alors $C^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

2 Transformation de Fourier

2.1 Les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Définition 16. La *transformée de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt.$$

Exemple 17. Si $G : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\widehat{G}(t) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exemple 18. Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$. On pose pour $\omega \in \mathbb{R}$, $e_\omega : t \mapsto e^{i\omega t}$ et on a :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad e_\omega \star h = \hat{h}(\omega) e_\omega.$$

Donc pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, e_ω est vecteur propre pour l'opérateur de convolution $f \mapsto f \star h$, associé à la valeur propre $\hat{h}(\omega)$.

Proposition 19. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$.

Lemme 20 (Riemann-Lebesgue)**.**

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} = 0.$$

Définition 21. On appelle *espace de Schwartz* l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, \exists C_{pq} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C_{pq} \}.$$

Exemple 22. $f : x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 23. Pour tout entier p tel que $1 \leqslant p < +\infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 24. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors f', xf et $\hat{f}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 25. $\forall g \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Proposition 26. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall q \in \mathbb{N}, \hat{f}^{(q)} = \widehat{(-ix)^q f}$.

Théorème 27 (Inversion de Fourier)**.** Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Corollaire 28. $\mathcal{F}$ est injective et $\mathcal{F}_{|\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ est un automorphisme bicontinu.

Définition 29. On note $\overline{\mathcal{F}}$ l'application inverse :

$$\overline{\mathcal{F}} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt.$$

Proposition 30. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g(t) dt.$$

Corollaire 31. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}}(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx.$$

Développement 1 (Formule sommatoire de Poisson)**.**

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

2.2 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées

Définition 32. L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$. Donc une application linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, \exists C_{pq} > 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_{pq} \sum_{\substack{\alpha \leqslant p \\ \beta \leqslant q}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|.$$

Définition 33. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}T$ ou $\hat{T}$, est la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Exemple 34. $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. $\mathcal{F}e_\omega = 2\pi\delta_\omega$.

Proposition 35. $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Théorème 36. La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Proposition 37. Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.3 Extension à $L^2(\mathbb{R})$

Remarque 38. $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$.

Théorème 39 (Plancherel)**.** Il existe une unique application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Cette application notée $\mathcal{F}$ est bijective et on a : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), ||\mathcal{F}f||_2 = \sqrt{2\pi}||f||_2$.

Corollaire 40. $T \mapsto \frac{1}{2\pi}\hat{T}$ est une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Proposition 41. $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), 2\pi\widehat{fg} = \hat{f} \star \hat{g}$.

Développement 2. On considère les fonctions dites de Hermite :

$$h_n : t \mapsto (n! 2^n \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

où H_n est le polynôme de Hermite donné par $H_{n+1} = -2tH_n + H_n'$ de degré n et de coefficient $(-2)^n$. Alors la famille (h_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2}dt)$ de vecteurs propres pour la transformée de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \widehat{h_n} = \sqrt{2\pi} i^n h_n.$$

3 Applications

3.1 Transformation de Fourier discrète

Définition 42. Soit A un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de l'unité dans A. On définit le *produit de convolution* de deux éléments a et b de $E = A^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad (a \star b)_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Proposition 43. Dans $A[X]/(X^n - 1)$, en associant à tout $a \in E$ le polynôme $P_a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, on a :

$$P_{a\star b} = P_a \cdot P_b.$$

Définition 44. On appelle *transformations de Fourier* les applications $\mathcal{F} : E \to E$ et $\overline{\mathcal{F}} : E \to E$ définies par :

$$(\mathcal{F}a)_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \omega^{ij} a_i = P_a(\omega^j) \qquad (\overline{\mathcal{F}}a)_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \omega^{-ij} a_i = P_a(\omega^{-j}).$$

Proposition 45. Pour tous $a, b \in E$, si on note $\cdot$ le produit terme à terme sur E :

$$\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}a + \mathcal{F}b \qquad \overline{\mathcal{F}}(a+b) = \overline{\mathcal{F}}a + \overline{\mathcal{F}}b$$
$$\mathcal{F}(a\star b) = \mathcal{F}a \cdot \mathcal{F}b \qquad \overline{\mathcal{F}}(a\star b) = \overline{\mathcal{F}}a \cdot \overline{\mathcal{F}}b.$$

De plus, pour tout $a \in E$:

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}a) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}a) = n \cdot a.$$

Algorithme 46. Si $n = 2^k$, on peut calculer une transformée de Fourier à n points en $O(n \log n)$ multiplications et additions.

Application 47 (Schönhage-Strassen)**.** Il existe un algorithme qui multiplie deux nombres de tailles n via transformation de Fourier en $O(n \log n \log\log n)$.

3.2 Convolution dans les fonctions périodiques

Définition 48. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ deux fonctions 2π-périodiques. On définit pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ leur produit de convolution comme suit :

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Définition 49. On appelle *noyau de Dirichlet* d'ordre N la fonction

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n.$$

Définition 50. On appelle *noyau de Fejér* d'ordre N la fonction

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n.$$

Proposition 51. (K_N) est une approximation de l'unité.

Définition 52. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ 2π-périodique. On appelle *somme partielle de Fejér* de f d'ordre N la fonction :

$$\sigma_N(f) = f \star K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n.$$

où $c_n(f)$ est le n-ième coefficient de Fourier de f.

Théorème 53 (Fejér)**.** Soit p un entier tel que $1 \leqslant p < +\infty$.
Soit f une fonction continue et 2π-périodique.
Alors $\forall N \in \mathbb{N}, ||\sigma_N(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ et $\sigma_N(f)$ tend uniformément vers f pour $||\cdot||_\infty$.
Soit f une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ 2π-périodique.
Alors $||\sigma_N(f)||_p \leqslant ||f||_p$ et $\sigma_N(f)$ tend uniformément vers f pour $||\cdot||_p$.

Développements

Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L^2
Formule sommatoire de Poisson

Références

Convolution Brézis + ε Briane-Pagès

$L^1(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R})$ Zuily-Queffélec

$L^2(\mathbb{R}), \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Demazure

$\mathbb{T}$ Pommellet