Agrégation de ressources en mathématiques et informatique

Jill-Jênn Vie

25 octobre 2014

I don't believe in [`god.pdf`], but I'm afraid of it.

The Usual Suspects

Table des matières

Chapitre 1

Conseils

Généralités

— **Ne laissez rien passer.** Vérifiez ce qui est écrit dans les livres.

— Entraînez-vous à restituer vos développements sur une feuille blanche.

— Pendant la préparation, n'écartez pas un développement uniquement parce que vous ne le comprenez pas : certains développements s'éclairciront pendant l'année[1]. Mais le jour de l'oral, ne présentez pas un développement que vous ne maîtrisez pas.

Avant les écrits

— Commencez à chercher des développements çà et là qui vous plaisent. Bouquinez[2] et **retenez les références** (livres, pas PDF) des développements.

— N'hésitez pas à demander à ceux qui préparent la prochaine leçon **quels développements ils ont choisis**, pour y jeter un œil afin de profiter un maximum de leur leçon.

— N'hésitez pas à sauter des questions à l'écrit[3]. Après l'épreuve, lisez-en le rapport, c'est très instructif. **Consultez les copies des meilleurs** pour confronter vos rédactions.

Après les écrits

— **Garantissez deux développements par leçon dès que possible.** Le temps de maturation d'un développement n'est pas à négliger. Une stratégie peut consister à commencer par ce qui ne vous plaît pas (comprendre : vos faiblesses) pour finir par ce qui vous plaît.

— Entraînez-vous à rédiger un plan en temps limité.

— Une idée d'activité à plusieurs : on tire une leçon, chacun rédige ses grands axes (avec références) en 5 minutes puis tous les plans sont dévoilés et chacun argumente ses choix.

1. J'emploie le passif ici, mais ça ne marchera que si vous êtes actif !

2. Par exemple, comprendre en profondeur toutes les subtilités qui interviennent dans les preuves du théorème de Frobenius-Zolotarev ou des théorèmes de Sylow est un bon entraînement aux réflexes qu'il faut avoir à l'écrit d'algèbre, quitte à ne pas conserver ce développement plus tard.

3. Vous pouvez d'ailleurs faire des marques dans la marge toutes les demi-heures, ça vous permettra de vous rappeler plus tard les questions qui vous ont posé problème.

Chapitre 2

Informatique

Algorithmique

901 Structures de données : exemples et applications.

- Tri par tas
- Insertion dans un arbre AVL (BBC)
- Hachage parfait (Cormen)

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

- Sélection en temps linéaire (BBC) (à corriger)
- Comparaison tri fusion / tri rapide (BBC)

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

- Tri par tas
- Comparaison tri fusion / tri rapide (BBC)

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt
- Plus longue sous-séquence commune

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt
- Plus longue sous-séquence commune

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

- Insertion dans un arbre AVL (BBC)
- Hachage parfait (Cormen)

925 Graphes : représentations et algorithmes.

- Résolution de 2-SAT
- 2-approximation du problème du voyageur de commerce dans le cas euclidien

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt
- Sélection en temps linéaire (BBC)

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

- Algorithme du lièvre et de la tortue
- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt
- Algorithme naïf d'unification (David)

Langages formels

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

- Antimirov (Sakarovitch) (à corriger)
- Algorithme de Knuth-Morris-Pratt

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

Calculabilité

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

- Ackermann n'est pas récursive primitive
- Une fonction Turing-calculable est μ-récursive (Wolper)

913 Machines de Turing. Applications.

- SAT est NP-complet (Wolper)
- Une fonction Turing-calculable est μ-récursive (Wolper)

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

- L'arithmétique du premier ordre est indécidable (Goubault)
- L'arithmétique de Presburger est décidable (Sipser)

915 Classes de complexité : exemples.

- SAT est NP-complet (Wolper)
- 2-approximation du problème du voyageur de commerce dans le cas euclidien

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

- Ackermann n'est pas récursive primitive
- Une fonction Turing-calculable est μ-récursive (Wolper)

928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions.

- SAT est NP-complet (Wolper)
- SET-COVER est NP-complet (Dasgupta)

Logique

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

- SAT est NP-complet (Wolper)
- Résolution de 2-SAT

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

- Théorème de Herbrand (Goubault)
- L'arithmétique du premier ordre est indécidable (Goubault)

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

- Théorème de Herbrand (Goubault)
- Algorithme naïf d'unification (David)

919 Unification : algorithmes et applications.

- Paires critiques (Baader)
- Algorithme naïf d'unification (David)

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

- Paires critiques (Baader)
- L'arithmétique du premier ordre est indécidable (Goubault)

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

- L'arithmétique du premier ordre est indécidable (Goubault)
- L'arithmétique de Presburger est décidable (Sipser)

Développements d'informatique (20)

Algorithme de Knuth-Morris-Pratt

En fait, il existe une référence pour ce développement : *Algorithms* de Sedgewick. Mais la version que je présente détermine via programmation dynamique un tableau de valeurs qui peut s'appliquer à d'autres problèmes sur les mots (recherche du plus long préfixe palindrome, détermination du plus grand k tel qu'il existe z tel que $s = z^k$).

Pour la leçon sur les langages rationnels, il vaut mieux insister sur l'automate qui se cache derrière cet algorithme ; pour la leçon sur l'analyse des algorithmes, on peut parachuter la fonction de potentiel qui permet de prouver que cet algorithme a une complexité amortie linéaire ; enfin, pour la leçon sur les exemples de preuve d'algorithme, il faut bien déterminer les préconditions.

— 906 Programmation dynamique : exemples et applications.
— 907 Algorithmique du texte : exemples et applications.
— 909 Langages rationnels. Exemples et applications.
— 926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.
— 927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

L'arithmétique du premier ordre est indécidable (Goubault)

Développement long. Il faut bien faire la partie calcul de la forme prénexe pour ne pas se tromper sur les formes de termes qu'on peut obtenir par résolution (ce n'est pas détaillé dans le Goubault).

— 914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.
— 917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.
— 920 Réécriture et formes normales. Exemples.
— 924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

SAT est NP-complet (Wolper)

Développement long, mais historique :) Il faut être clair et rapide sur les définitions des variables, bien écrire toutes les formules et les assembler pour montrer pourquoi ça marche. Subtilité : ne pas oublier le vecteur des choix non déterministes à chaque étape. C'est fait à merveille dans le Wolper.

Il est facile de ne pas avoir le temps de le finir, mais peaufiner ce développement vous permettra de mettre en exergue ce qui est pertinent et le réussir témoigne d'une bonne connaissance des machines de Turing et du processus de réduction.

— 913 Machines de Turing. Applications.
— 915 Classes de complexité : exemples.
— 916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.
— 928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions.

Algorithme naïf d'unification (David)

Il y a deux algorithmes d'unification dans le David : un vraiment naïf, bon en pratique, implémenté dans Caml, facile à prouver ; l'autre pseudo-linéaire, très intéressant, difficile à prouver. La stratégie classique consiste à présenter le naïf impeccablement devant le jury et éventuellement mentionner l'autre si c'est demandé dans les questions. Mais si vous êtes téméraire (comprendre : inconscient), vous pouvez tenter de préparer l'algorithme pseudo-linéaire d'unification.

— 918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.
— 919 Unification : algorithmes et applications.
— 927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Résolution de 2-SAT

Il paraît que cet algorithme est développé dans l'un des Knuth. Je ne l'ai pas trouvé. C'est l'un des rares développements qui traite à la fois d'algorithmique de graphes et de logique : la satisfiabilité d'une formule de 2-SAT est ramenée à l'étude des composantes connexes d'un graphe dont les nœuds sont des littéraux et pour toute arête $u \to v$, les littéraux correspondants vérifient $u \Rightarrow v$.

— 916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.
— 925 Graphes : représentations et algorithmes.

2-approximation du problème du voyageur de commerce dans le cas euclidien

Le saviez-vous ? Si les poids sur les arêtes d'un graphe complet vérifient l'inégalité triangulaire, faire un arbre couvrant puis doubler chaque arête puis faire un chemin eulérien puis un élagage permet d'obtenir un chemin hamiltonien de poids au plus le double du minimal.

— 915 Classes de complexité : exemples.
— 925 Graphes : représentations et algorithmes.

Une fonction Turing-calculable est μ-récursive (Wolper)

C'est fait de manière précise mais illisible dans le Cori, claire mais élusive dans le Wolper. Choisissez votre camp. Le souci étant que la leçon sur les fonctions récursives ne permet pas beaucoup de choix de développement, à part Ackermann et celui-ci.

— 912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.
— 913 Machines de Turing. Applications.
— 922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

Insertion dans un arbre AVL (BBC)

C'est fait de manière rigoureuse dans le BBC mais il y a une coquille ou deux, Kurisu-chan[1] fait ça à merveille dans ses slides, avec des schémas clairs. La difficulté étant que comme on modifie l'arbre, il faut déterminer les hauteurs des sous-arbres en chaque nœud lors de trois phases : avant insertion, après insertion, après rééquilibrage. Et c'est encore très facile de s'embourber dans les notations. Bref, faites des dessins.

— 901 Structures de données : exemples et applications.
— 921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Ackermann n'est pas récursive primitive

C'est fait dans le Cori mais Laurent nous avait présenté une preuve plus simple, cf. .

— 912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.
— 922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

1. Cristina.

Comparaison tri fusion / tri rapide (BBC)

Paul vous dira que faire les deux tris en 15 minutes relève de l'inconscience, mais avoir le *Master Theorem* dans votre plan permet de déterminer la complexité du tri fusion directement à partir de la relation de récurrence. BBC sera votre ami pour toute la leçon sur la complexité. Leur preuve du tri rapide est néanmoins simplifiable, cf. PDF (bientôt).

— 902 Diviser pour régner : exemples et applications.
— 903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

Hachage parfait (Cormen)

— 901 Structures de données : exemples et applications.
— 921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

L'arithmétique de Presburger est décidable (Sipser)

Développement très long. Attention aux PDF sur Internet, truffés de fautes. Bon courage.

— 914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.
— 924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Plus longue sous-séquence commune

Un conseil : implémentez-le. Vous l'expliquerez plus facilement à l'oral. Expliquez comment la relation de récurrence sur les longueurs des PLSSC permet de faire intervenir le balayage. Vous pourrez finir par un exemple, puis par expliquer comment exhiber une sous-séquence commune de longueur maximale, puis par dire que si seule la longueur de la PLSSC est demandée, on peut avoir une complexité mémoire linéaire.

— 906 Programmation dynamique : exemples et applications.
— 907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

Paires critiques (Baader)

Faites des dessins.

— 919 Unification : algorithmes et applications.
— 920 Réécriture et formes normales. Exemples.

Sélection en temps linéaire (BBC)

Une difficulté notoire de ce développement réside dans les parties entières. Cormen est assez vague, BBC fait ça mieux, en exercice. Mais on peut faire une majoration grossière qui sera plus simple donc plus mémorisable et convaincante. Cf. PDF (bientôt).

— 902 Diviser pour régner : exemples et applications.
— 926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Théorème de Herbrand (Goubault)

Insistez sur le côté « faire du sémantique avec le syntaxique ». Il y a un lemme dans le Goubault qui ne sert à rien. Cf. PDF (bientôt).

— 917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.
— 918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

Tri par tas

Pas de référence satisfaisante. Une difficulté notoire réside dans le fait qu'on mélange arbre et représentation de tableau tronquée.

— 901 Structures de données : exemples et applications.
— 903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

Algorithme du lièvre et de la tortue

Un petit joyau dont la première partie est faite dans le Demazure et le Flajolet-Sedgewick, mais pas la deuxième.

— 927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Antimirov (Sakarovitch)

Les notations de Sakarovitch sont un peu hasardeuses. Mais le développement est très joli : étant donné une expression rationnelle à n lettres, il est possible de construire un automate non déterministe à au plus $n+1$ états : l'automate aux termes dérivés. Cf. PDF (bientôt).

— 909 Langages rationnels. Exemples et applications.

SET-COVER est NP-complet (Dasgupta)

Pour le fun.
— 928 Problèmes NP-complets : exemples de réductions.

Références

BAADER, Franz (1998). *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press.

BEAUQUIER, Danièle, Jean BERSTEL et Philippe CHRÉTIENNE (1992). *Éléments d'algorithmique*. Masson. URL : http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Elements/Elements.pdf.

CORMEN, Thomas (2010). *Introduction à l'algorithmique*. Dunod.

DASGUPTA, Sanjoy, Christos PAPADIMITRIOU et Umesh VAZIRANI (2006). *Algorithms*. McGraw.

DAVID, René (2004). *Introduction à la logique*. Dunod.

DEMAZURE, Michel (1997). *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes*. Cassini.

GOUBAULT-LARRECQ, Jean (2001). *Proof Theory and Automated Deduction*. Springer.

SAKAROVITCH, Jacques (2003). *Éléments de théorie des automates*. Vuibert.

SIPSER, Michael (2006). *Introduction to the Theory of Computation*. Thomson.

WOLPER, René (2001). *Introduction à la calculabilité*. Dunod.

Chapitre 3

Mathématiques

Algèbre

104 Groupes finis. Exemples et applications.

- Théorèmes de Sylow (Perrin)
- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Dilemme des prisonniers (Zavidovique)
- Transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$ (RMS n° 110)
- Théorème de Frobenius-Zolotarev (Beck) (p. 251)

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)
- Théorème de Frobenius-Zolotarev (Beck) (p. 251)

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Pavage du plan (Berger ; Goblot)
- Transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$ (RMS n° 110)
- Théorème de Frobenius-Zolotarev (Beck) (p. 251)

120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
- Théorème de Chevalley-Warning et EGZ (Serre ; Zavidovique ; Nathanson)

121 Nombres premiers. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
- Théorème de Chevalley-Warning et EGZ (Serre ; Zavidovique ; Nathanson)
- Théorèmes de Sylow (Perrin)

123 Corps finis. Applications.

— Algorithme de Berlekamp (Demazure)
— Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
— Théorème de Chevalley-Warning et EGZ (Serre ; Zavidovique ; Nathanson)

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

— Algorithme de Berlekamp (Demazure)
— Décomposition effective de Dunford (Risler & Boyer) (pp. 62, 176)

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

— Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
— Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

— Algorithme de Berlekamp (Demazure)
— Sous-espaces de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation (Beck ; FGN Algèbre 1) (p. 144, p. 300)

152 Déterminant. Exemples et applications.

— Théorème de Frobenius-Zolotarev (Beck) (p. 251)
— Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

— Surjectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Gourdon-Algèbre) (p. 202, à un détail près)
— Décomposition effective de Dunford (Risler & Boyer) (pp. 62, 176)

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

— Décomposition effective de Dunford (Risler & Boyer) (pp. 62, 176)
— Surjectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Gourdon-Algèbre) (p. 202, à un détail près)

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

— Enveloppe convexe du groupe orthogonal (Alessandri ; FGN Algèbre 1 ; FGN Algèbre 3) (p. 157, p. 329, p. 130)
— Sous-espaces de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation (Beck ; FGN Algèbre 1) (p. 144, p. 300)

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

- Sous-espaces de $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ stables par translation (Beck ; FGN Algèbre 1) (p. 144, p. 300)
- Algorithme de Berlekamp (Demazure)

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
- Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)
- Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

- Bi-rapports et droite de Simson
- Pavage du plan (Berger ; Goblot)

183 Utilisation des groupes en géométrie.

- Pavage du plan (Berger ; Goblot)
- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)
- Dilemme des prisonniers (Zavidovique)

Analyse

203 Utilisation de la notion de compacité.

- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)
- Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)
- Théorème de Brouwer (Rouvière)

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Enveloppe convexe du groupe orthogonal (Alessandri ; FGN Algèbre 1 ; FGN Algèbre 3) (p. 157, p. 329, p. 130)
- Opérateurs hypercycliques (Gonnord & Tosel)

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

- Théorème de Brouwer (Rouvière)
- Lemme de Morse (Rouvière)

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

- Théorème de Brouwer (Rouvière)
- Lemme de Morse (Rouvière)

218 Applications des formules de Taylor.

- Décomposition effective de Dunford (Risler & Boyer)
- Lemme de Morse (Rouvière)

219 Extremums – existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal (Alessandri ; FGN Algèbre 1 ; FGN Algèbre 3) (p. 157, p. 329, p. 130)

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

- Théorème de stabilité de Liapounov (Rouvière)
- Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation (Beck ; FGN Algèbre 1) (p. 144, p. 300)

221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Théorème de stabilité de Liapounov (Rouvière)
- Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation (Beck ; FGN Algèbre 1) (p. 144, p. 300)

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Méthode de Newton (Rouvière)

— Développement asymptotique de la série harmonique (FGN Analyse 1)

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

— Méthode de Newton (Rouvière)
— Développement asymptotique de la série harmonique (FGN Analyse 1)

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

— Méthode de Newton (Rouvière)
— Opérateurs hypercycliques (Gonnord & Tosel)

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

— Méthode de Newton (Rouvière)
— Théorème de John (FGN Algèbre 3) (p. 229)

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

— Formule sommatoire de Poisson (Gourdon-Analyse)
— Développement asymptotique de la série harmonique (FGN Analyse 1)

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

— Méthode de Newton (Rouvière)

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

— Intégrale de Fresnel (Gourdon-Analyse)
— Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L2 (Kolmogorov)

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

— Intégrale de Fresnel (Gourdon-Analyse)
— Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L2 (Kolmogorov)

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

— Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L2 (Kolmogorov)
— Formule sommatoire de Poisson (Gourdon-Analyse)

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Formule sommatoire de Poisson (Gourdon-Analyse)
- Galton-Watson (Williams)

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

- Polynômes de Bernstein (Zuily & Queffélec)
- Galton-Watson (Williams)

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- Polynômes de Bernstein (Zuily & Queffélec)
- Galton-Watson (Williams)

Développements d'algèbre (10)

Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques (H2G2)

Avant tout, sachez qu'à moins de n'avoir Philippe Caldero lui-même dans votre jury, ce développement ne sera peut-être pas choisi. Ceci su, c'est un développement très joli qui touche à plein de domaines, des actions de groupe jusqu'à la classification des formes quadratiques dans le cas particulier des corps finis. Si vous faites la loi de réciprocité quadratique en développement, vous avez le choix entre une preuve par les sommes de Gauss très technique donc difficile à maîtriser (Serre), une preuve par dénombrement dépourvue de référence (PDF par J.-C. Raoult), et cette preuve par double comptage des points sur la sphère $\mathbb{F}_p^q$, tirée du superbe H2G2 (2013).

- 104 Groupes finis. Exemples et applications.
- 120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 183 Utilisation des groupes en géométrie.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Théorème de Frobenius-Zolotarev (Zavidovique)

Ce développement est un bon entraînement aux réflexes qui vous seront utiles pour l'écrit d'algèbre. Comme tous ceux qui entrent dans beaucoup de leçons (en fait, davantage que celles listées ci-dessous), ça utilise des résultats de beaucoup de domaines : les transvections du groupe linéaire d'un espace de dimension finie sont deux à deux conjuguées, le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique, un morphisme sur un groupe cyclique est entièrement défini par l'image générateur.

- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

— 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
— 152 Déterminant. Exemples et applications.

Algorithme de Berlekamp (Demazure)

Utiliser le pivot de Gauss pour avoir un critère d'irréductibilité des polynômes sur $\mathbb{F}_p$. C'est bien fait dans le Demazure, à la conclusion près qui mérite d'être éclaircie. Un des rares développements qui rentrent dans la leçon sur la dimension d'un espace vectoriel.

— 123 Corps finis. Applications.
— 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
— 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
— 162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Théorème de Chevalley-Warning et EGZ (Serre ; Nathanson)

Le saviez-vous ? Si vous choisissez $2n-1$ entiers relatifs, alors il en existe n dont la somme est un multiple de n (théorème d'Erdős-Ginzburg-Ziv [1]). Et on a besoin du théorème de Chevalley-Warning pour ça ! Ou plutôt : il n'en existe pas de démonstration triviale.

D'abord, prouver le théorème de Chevalley-Warning (Serre), ensuite l'appliquer pour prouver EGZ pour n premier (Zavidovique ou Nathanson), ensuite s'il reste du temps, montrer que s'il est vrai pour deux entiers m et n, il est vrai pour mn (PDF par Igor Kortchemski).

— 120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
— 121 Nombres premiers. Applications.
— 123 Corps finis. Applications.

Pavage du plan (Berger ; Goblot)

Frustration : ce développement est joli, entre dans des leçons à faible teneur en développements, mais pour le faire tenir en 15 minutes, il faut soit mixer du Berger et du Goblot, soit recourir à ce PDF qui explique ça très bien mais à sa sauce.

— 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
— 182 Applications des nombres complexes à la géométrie.
— 183 Utilisation des groupes en géométrie.

Dilemme des prisonniers (Zavidovique)

L'énigme à la fin du Zavidovique : « Une énigme pour finir ». Prenez votre temps, il est court. PDF de Sandrine Caruso.

— 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
— 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

1. Merci XeLaTeX pour le *ő* de « Erdős ».

Surjectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Gourdon-Algèbre)

Beaucoup de références mais pas toujours satisfaisantes : Beck a besoin d'un lemme qui se trouve dans Mneimné-Testard, donc je vous suggérerais plutôt le Gourdon-Algèbre qui est *standalone* et simple. Gourdon oublie de préciser que $D(t)$ et $D'(t)$ commutent, lorsqu'il affirme que la dérivée de $t \mapsto \exp D(t)$ est $t \mapsto D'(t) \exp D(t)$.

- 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Théorèmes de Sylow (Perrin)

Comme dit plus haut : révisez cette preuve, et vous acquerrez des réflexes en actions de groupe. Anecdote : j'ai cherché un moment la référence papier du livre atomique [2] *Groupes finis* de Serre (PDF disponible sur arXiv), en vain, alors que Perrin dit lui-même que sa démonstration est tirée de « l'excellent (mais introuvable) » Serre.

- 104 Groupes finis. Exemples et applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.

Transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$ (RMS n° 110)

Un ovni. On prouve qu'il faut au moins $n-1$ transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$ en faisant agir un groupe sur l'espace des graphes dont les nœuds sont $\{1, \ldots, n\}$. Un moment de la preuve me paraît un peu mal dit (« les composantes connexes sont stables par les transpositions », cf. le PDF de Benjamin Dadoun) mais telle quelle, elle a plu au jury.

D'aucuns prétendent qu'il serait dans FGN Algèbre 1. Pas encore trouvé.

- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Bi-rapports et droite de Simson

C'est posé en exercice non corrigé dans le Audin et il y a un rappel sur les systèmes cubiques dans le H2G2.

- 182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

Développements d'analyse (11)

Méthode de Newton (Rouvière)

Archiclassique, incontournable.

- 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

2. Parce qu'il est concis et qu'il atomise la preuve.

— 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
— 232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier dans L2 (Kolmogorov)

Frustration : c'est joli, c'est difficile à faire entrer (ça repose sur la densité des polynômes orthogonaux avec un bonus intégration par parties), c'est presque sans référence : le Kolmogorov croulant de la BU l'intègre par parties. Cf. PDF.

— 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
— 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
— 240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

Galton-Watson (Williams)

Un développement qui utilise beaucoup de résultats de probabilités tout en ne faisant pas peur aux informaticiens. Notez que ça entre aussi dans les suites définies par une relation de récurrence.

— 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
— 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
— 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Formule sommatoire de Poisson (Gourdon-Analyse)

Attention, l'énoncé diffère d'une référence à l'autre. Sans l'application c'est trop court, avec l'application ça peut facilement être trop long.

— 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
— 240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.
— 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Lemme de Morse (Rouvière)

J'ai mis du temps à choisir ce développement parce que l'énoncé me terrifiait. Mais Rouvière explique ça bien. Notez que ça entre aussi dans la leçon sur les formes quadratiques, ainsi que dans beaucoup de leçons hors option D.

— 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
— 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
— 218 Applications des formules de Taylor.

Développement asymptotique de la série harmonique (FGN Analyse 1)

- 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Théorème de Brouwer (Rouvière)

- 206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
- 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Théorème de stabilité de Liapounov (Rouvière)

Attention, tel que c'est fait dans le Rouvière, ça rentrera difficilement dans 15 minutes ! Je crois que c'est aussi fait dans Avez. Voir aussi le PDF de Loïc Devilliers.

- 220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
- 221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Polynômes de Bernstein (Zuily & Queffélec)

Ce développement prouve le théorème de Stone-Weierstrass : sur un compact, les polynômes sont denses dans les fonctions continues.

- 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Opérateurs hypercycliques

Un très joli développement de topologie : un opérateur continu A sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel métrique complet séparable E est dit *hypercyclique* s'il existe un élément x de E tel que la famille $(A^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans E. Le développement fournit une condition suffisante d'hypercyclicité.

- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Intégrale de Fresnel (Gourdon-Analyse)

C'est long. Dépêchez-vous.

- 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
- 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Développements d'algèbre et d'analyse (5)

Théorème de John (FGN Algèbre 3)

Archiclassique. Ce serait dommage de le contourner. Je pense que vous pouvez admettre la log-concavité du déterminant (c'est fait dans le FGN Algèbre 3 aussi).

— 152 Déterminant. Exemples et applications.
— 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
— 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
— 203 Utilisation de la notion de compacité.
— 219 Extremums – existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
— 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Sous-espaces de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translation (FGN Algèbre 1)

Superbe. Courez le lire dans le FGN Algèbre 1 (p. 300). Si vous adoptez la preuve du Beck (p. 144), vous pourrez même le faire rentrer dans les leçons sur le déterminant et la convolution.

— 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
— 159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
— 162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
— 220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
— 221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (Algèbre de L3)

Très classique, attention à ne pas s'embourber dans les notations.

— 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
— 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
— 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
— 203 Utilisation de la notion de compacité.
— 206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Décomposition effective de Dunford (Risler & Boyer)

Il y a des pléthores de résultats de la décomposition de Dunford qu'on peut présenter en développement, mais une décomposition effective basée sur la méthode de Newton, c'est original. En revanche, le Risler & Boyer est truffé de fautes, donc préférez la version PDF de Loïc Devilliers.

— 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

— 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
— 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
— 218 Applications des formules de Taylor.

Enveloppe convexe du groupe orthogonal (Alessandri ; FGN Algèbre 1 ; FGN Algèbre 3)

Un développement éclaté dans plusieurs références : Alessandri p. 157, FGN Algèbre 1 p. 329, FGN Algèbre 3 p. 130. Le théorème de Krein-Milman (tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux) est difficile à faire en 15 minutes donc on se limite à montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.

— 159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
— 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
— 219 Extremums – existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Références

ALESSANDRI, Michel (1999). *Thèmes de géométrie*. Dunod.

AUDIN, Michèle (2006). *Géométrie*. EDP Sciences.

BECK, Vincent, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ (2004). *Objectif agrégation*. H&K.

BERGER, Marcel (1977). *Géométrie tome 2*. Nathan.

CALDERO, Philippe et Jérôme GERMONI (2013). *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*. Calvage & Mounet.

DEMAZURE, Michel (1997). *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes*. Cassini.

FRANCINOU, Serge, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2006). *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Algèbre 3*. Cassini.

— (2007). *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Algèbre 1*. Cassini.

— (2008). *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse 1*. Cassini.

GOBLOT, Rémi (1998). *Thèmes de géométrie : géométrie affine et euclidienne*. Masson.

GONNORD et TOSEL (1996). *Topologie et analyse fonctionnelle : thèmes d'analyse pour l'agrégation*. Ellipses.

GOURDON, Xavier (2008a). *Algèbre : mathématiques pour MP**. Ellipses.

— (2008b). *analyse : mathématiques pour MP**. Ellipses.

KOLMOGOROV (1974). *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Mir.

NATHANSON, Melvyn B. (1996). *Additive Number Theory : Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*. Springer-Verlag.

PERRIN, Daniel (1995). *Cours d'algèbre*. Ellipses.

RISLER, Jean-Jacques et Pascal BOYER (2006). *Algèbre pour la licence 3 : groupes, anneaux, corps*. Dunod.

RMS, Collectif (2000). *Revue de la filière mathématiques*. 110. Rue des Écoles.

ROUVIÈRE, Jacques (2009). *Petit guide de calcul différentiel*. Cassini.

SERRE, Jean-Pierre (1995). *Cours d'arithmétique*. Presses universitaires de France.

SZPIRGLAS, Aviva (2009). *Mathématiques L3 : Algèbre*. Pearson.

WILLIAMS (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.

ZAVIDOVIQUE, Maxime (2013). *Un Max de Maths : problèmes pour agrégatifs et mathématiciens, en herbe ou confirmés*. Calvage & Mounet.

ZUILY, Claude et Hervé QUEFFÉLEC (2007). *Analyse pour l'agrégation*. Dunod.